# Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2013

- **Mathematik 13 Nichttechnik - B I - Lösung**

**Teilaufgabe 1 (4 BE)**

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c_k} = \begin{pmatrix} -1 \\ k+2 \\ k+3 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c_k}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & k+2 \\ 0 & 5 & k+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)+(I)} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 5 & k+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[III - 5\cdot(II)]{} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & -4\cdot k - 2 \end{pmatrix}$$

Linear abhängig: $-4\cdot k - 2 = 0$ **auflösen**, $k \rightarrow -\frac{1}{2}$

Vektoren bilden Basis für $k \neq -\frac{1}{2}$

**Teilaufgabe 2.0**

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ sowie der Punkt **A(10/2/8)** gegeben.

**Teilaufgabe 2.1 (4 BE)**

Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander verlaufen.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \lambda\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{g und h sind nicht parallel}$$

**g ∩ h:**

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 9 + 3\cdot r &= 3 + 5\cdot s & &\Rightarrow & r &= -2 \\ 1 &= 1 + s & \Rightarrow \; s &= 0 & & \\ 2 - 2\cdot r &= 4 + 4\cdot s & &\Rightarrow & r &= -1 \end{aligned}$$

Widerspruch für r, Geraden schneiden sich nicht, sind also windschief.

**Teilaufgabe 2.2** (5 BE)
Die Ebene E wird durch den Punkt A und die Gerade g aufgespannt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und in Koordinatenform.
[ Mögliches Teilergebnis: E: $2 \cdot x_1 - 20 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 4 = 0$ ]

Ebene E in Parameterform: E: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

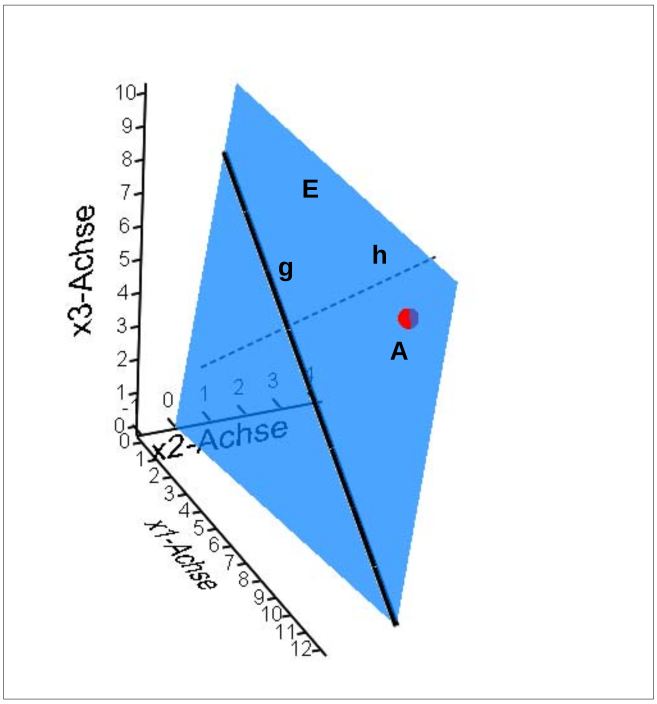
Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & x_1 - 9 \\ 0 & 1 & x_2 - 1 \\ -2 & 6 & x_3 - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \cdot (III) + 2 \cdot (I)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & x_1 - 9 \\ 0 & 1 & x_2 - 1 \\ 0 & 20 & 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_3 - 24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(III) - 20 \cdot (II)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & x_1 - 9 \\ 0 & 1 & x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 2 \cdot x_1 - 20 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 4 \end{pmatrix}$$

Ebene E in Koordinatenform: E: $2 \cdot x_1 - 20 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 4 = 0$

**Teilaufgabe 2.3** (3 BE)
Skizzieren Sie die Ebene E, die Geraden g und h sowie den Punkt A in eine Zeichnung.



**Teilaufgabe 2.4** **(6 BE)**
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P der Ebene E mit der Geraden h. Begründen Sie, dass die Gerade j, die durch A verläuft und die Geraden g und h schneidet, in E liegt.
Stellen Sie eine Gleichung dieser Geraden j auf und zeichnen Sie die Gerade und den Punkt P in die Zeichung von 2.3 ein.

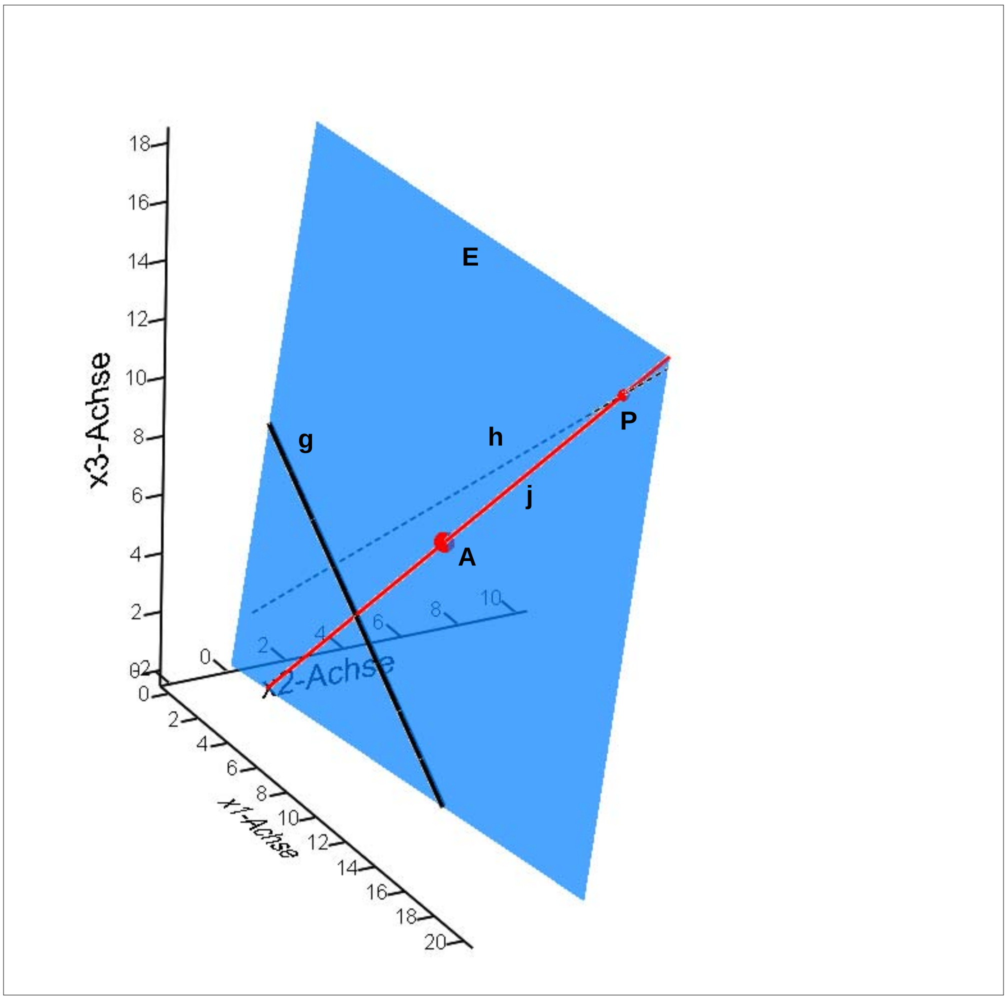
$E \cap h$:

$$2\cdot(3+5\cdot s) - 20\cdot(1+s) + 3\cdot(4+4\cdot s) - 4 = 0 \text{ auflösen}, s \rightarrow 3$$

$$OP := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad P := OP^T \qquad P \rightarrow (18 \quad 4 \quad 16)$$

$A \notin g,\ A \in E,\ g \subset E \ \Rightarrow\ j \subset E$

$j \cap h = \{ P \}$ Gerade j geht durch A und P: AP: $x_j = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$



**Teilaufgabe 3.0**
Die drei Sektoren R, S und T eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten.
Die Gesamtproduktion beträgt im Sektor R 240 ME, im Sektor S 150 ME und in Sektor T 220 ME.

Die Inputmatrix A ist gegeben durch $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$.

**Teilaufgabe 3.1 (4 BE)**
Erstellen Sie die Input-Output-Tabelle.

Inputmatrix: Produktionsvektor: Einheitsmatrix:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{5}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \\ 0 & \frac{6}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} 240 \\ 150 \\ 220 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung: $\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.8 & -0.2 \\ 0 & -0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$

Marktvektor: $\mathbf{y} := (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 47 \\ 52 \\ 42 \end{pmatrix}$

Berechnungen

$$\mathbf{Warenflussmatrix} = \begin{pmatrix} \text{"Verflechtung"} & \text{"R"} & \text{"S"} & \text{"T"} & \text{"y"} & \text{"x"} \\ \text{"R"} & 96 & 75 & 22 & 47 & 240 \\ \text{"S"} & 24 & 30 & 44 & 52 & 150 \\ \text{"T"} & 0 & 90 & 88 & 42 & 220 \end{pmatrix}$$

**Teilaufgabe 3.2** **(8 BE)**
Die Produktion soll aufgrund von Umbaumaßnahmen im Sektor T um 20 ME verringert werden, im Sektor R aber konstant bleiben.
Wegen langfristiger Verträge muss die Marktabgabe in den Sektoren R und T jeweils mindestens 30 ME betragen. Die gesamte Marktabgabe darf 153 ME nicht überschreiten, da zusätzlich logistische Probleme aufgetreten sind.
Bestimmen Sie den Bereich, in welchem die Produktion des Sektors S möglich ist.

Neuer Produktionsvektor: $$x(x_2) := \begin{pmatrix} 240 \\ x_2 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$y(x_2) := (E - A)\cdot x(x_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 124 - \dfrac{x_2}{2} \\ \dfrac{4\cdot x_2}{5} - 64 \\ 120 - \dfrac{3\cdot x_2}{5} \end{pmatrix}$$

$$y(x_2)_1 \geq 30 \qquad y(x_2)_2 \geq 0 \qquad y(x_2)_3 \geq 30$$

$$\begin{pmatrix} y(x_2)_1 \geq 30 \\ y(x_2)_2 \geq 0 \\ y(x_2)_3 \geq 30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 124 - \dfrac{x_2}{2} \geq 30 \\ \dfrac{4\cdot x_2}{5} - 64 \geq 0 \\ 120 - \dfrac{3\cdot x_2}{5} \geq 30 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, x_2 \ \rightarrow 80 \leq x_2 \leq 150$$

$$y(x_2)_1 + y(x_2)_2 + y(x_2)_3 \leq 153 \rightarrow 180 - \frac{3\cdot x_2}{10} \leq 153 \text{ auflösen}, x_2 \ \rightarrow 90 \leq x_2$$

$$\begin{pmatrix} 80 \leq x_2 \leq 150 \\ 90 \leq x_2 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, x_2 \ \rightarrow 90 \leq x_2 \leq 150$$

**Teilaufgabe 3.3 (6 BE)**
Es wird ein neues Produktionsverfahren im Sektor T eingeführt. Dies hat die neue Inputmatrix

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.09 \\ 0.1 & 0.2 & 0.18 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \text{ zur Folge.}$$

Berechnen Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$, wenn erwartet wird, dass die Sektoren R 51 ME, S 60 ME und T 30 ME an den Markt abgeben.
Interpretieren Sie die prozentualen Veränderungen der Einträge $a_{13}$ und $a_{23}$ der Matrix $A_{neu}$ gegebnüber den entsprechenden Einträgen der Matrix A.

Gegeben: $A_{neu} := \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{5}{10} & \frac{9}{100} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{18}{100} \\ 0 & \frac{6}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$ $\quad y_{neu} := \begin{pmatrix} 51 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem auflösen:

$$(E - A_{neu}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y_{neu} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot x_1}{5} - \frac{x_2}{2} - \frac{9 \cdot x_3}{100} \\ \frac{4 \cdot x_2}{5} - \frac{x_1}{10} - \frac{9 \cdot x_3}{50} \\ \frac{3 \cdot x_3}{5} - \frac{3 \cdot x_2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) := (E - A_{neu}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y_{neu} \text{ auflösen}, x_1, x_2, x_3 \rightarrow (240 \;\; 150 \;\; 200)$$

$$x_{neu} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_{neu} = \begin{pmatrix} 240 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **R:** | $a_{13neu} := 0.09$ | $a_{13} := A_{1,3}$ | $a_{13} = 0.1$ |
| **S:** | $a_{23neu} := 0.18$ | $a_{23} := A_{2,3}$ | $a_{23} = 0.2$ |

$$\frac{0.09 + 0.18}{0.1 + 0.2} = 0.9$$

Es werden zur Produktion von T je 10% weniger Produkte der Sektoren R und S benötigt.