Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2013

- **Mathematik 13 Nichttechnik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Die drei Fertigungsbereiche M, B und C eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten.

Die Input-Output-Tabelle

▪	M	B	C	Markt	Produktion
M	20	40	20	20	100
B	a	100	10	b	200
C	80	40	40	c	d

und die zugehörige Inputmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.5 & e \\ 0.8 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$ geben eine Übersicht über die Verflechtungen (Angaben in Mengeneinheiten (ME), a, b, c, d, e $\in \mathbb{R}^+$).

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)
Berechnen Sie die Variablen a, b, c, d und e und erläuten Sie die Bedeutung des Wertes a_{21} der Inputmatrix.

$$\frac{a}{100} = \frac{8}{10} \quad \Rightarrow \quad a := 80$$

$$b := (200 - a - 100 - 10) \quad \Rightarrow \quad b = 10$$

$$\frac{40}{d} = 0.2 \quad \Rightarrow \quad d := 200$$

$$c := 200 - 80 - 40 - 40 \quad \Rightarrow \quad c = 40$$

$$e := \frac{10}{200} = 0.05$$

$a_{21} = 0.8$ Bereich M benötigt 0,8 ME aus Bereich B, um 1 ME zu produzieren.

Teilaufgabe 1.2.0
Für die nachfolgenden Aufgaben gilt: **e = 0.05**

Teilaufgabe 1.2.1 (5 BE)
Im kommenden Produktionszeitraum wird $\vec{y} = (48 \quad 72 \quad 24)^T$ als Marktvektor zugrunde gelegt.
Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor.

Gegeben:

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{8}{10} & \frac{5}{10} & \frac{5}{100} \\ \frac{8}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \qquad E - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.1 \\ -0.8 & 0.5 & -0.05 \\ -0.8 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 48 \\ 72 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

$$(E - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4 \cdot x_1}{5} - \frac{x_2}{5} - \frac{x_3}{10} \\ \frac{x_2}{2} - \frac{4 \cdot x_1}{5} - \frac{x_3}{20} \\ \frac{4 \cdot x_3}{5} - \frac{x_2}{5} - \frac{4 \cdot x_1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 72 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} := (E - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y \text{ auflösen}, x_1, x_2, x_3 \rightarrow (276 \quad 632 \quad 464)$$

Produktionsvektor:

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 276 \\ 632 \\ 464 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.2.2 (8 BE)
Für einen zukünftigen Produktionszeitraum sollen folgende Rahmenbedingungen gelten:

- Die Produktion des Bereichs B ist doppelt so groß wie die Produktion in M.
- Bereich C gibt keine Güter an den Markt ab.
- Die Produktion von Fertigungsbereich C beträgt 120 ME.

Berechnen Sie den Produktions- und den Marktabgabevektor für diese Planung und wie viel Prozent M und B jeweils an den Markt abgeben.

Produktionsvektor:

$$x(x_1) := \begin{pmatrix} x_1 \\ 2 \cdot x_1 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Marktvektor:

$$y(y_1, y_2) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

$$(E - A) \cdot x(x_1) = y(y_1, y_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot x_1}{5} - 12 \\ \frac{x_1}{5} - 6 \\ 96 - \frac{6 \cdot x_1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} := (E - A) \cdot x(x_1) = y(y_1, y_2) \text{ auflösen}, x_1, y_1, y_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 80 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 80$ $\quad x(x_1) = \begin{pmatrix} 80 \\ 160 \\ 120 \end{pmatrix}$ M B C $\quad y_1 = 20 \quad y_2 = 10 \quad y(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ M B C

Abgabe von M: $\frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 25\,\%$ $\qquad$ Abgabe von B: $\frac{10}{160} = \frac{1}{16} = 6.25\,\%$

Teilaufgabe 2.0

In einem Koordinatensystem des IR^3 sind die Punkte **A(1 / –2 / 1), B(–2 / 2 / 2) , C (–1 / 4 / 0)** und S_k**(7 – k / k – 3 / k)** mit **k ∈ IR** gegeben.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Ermitteln Sie, für welche Werte von k die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS_k}$ linear unabhängig sind, und geben Sie an, was dies für die Lage der Punkte A, B, C und S_k bedeutet.

$$AB := \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad AC := \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad AS_k(k) := \begin{pmatrix} 6-k \\ k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

Aufstellen der Matrix:

$$M(k) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6-k \\ 4 & 6 & k-1 \\ 1 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\cdot(III)+(I)]{3\cdot(II)+4\cdot(I)} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6-k \\ 0 & 10 & 21-k \\ 0 & -5 & 2\cdot k+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\cdot(III)+(II)]{} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6-k \\ 0 & 10 & 21-k \\ 0 & 0 & 3\cdot k+27 \end{pmatrix}$$

Linear abhängig: $3\cdot k + 27 = 0$ **auflösen**, $k \rightarrow -9$

Linear unabhängig: $k \neq -9$

Die Punkte A, B, C und S_k liegen nicht in einer Ebene, sie bilden eine Pyramide.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h, welche durch den Punkt S_5 (also **k = 5**) sowie den Mittelpunkt M der Strecke [BC] verläuft.

Ortsvektoren:

$$OB := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad OC := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad OM := \frac{1}{2}\cdot(OB + OC) = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad OS_5 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Gerade h: $$x_h(\tau) := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix} 3.5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene E. Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an und bestimmen Sie die zugehörige Koordinatenform.
[Mögliches Teilergebnis: E: $2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 2$]

Parameterdarstellung Ebene E:

$$x_E(\rho, \mu) := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Umrechnung in Koordinatenform:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & x_1 - 1 \\ 4 & 6 & x_2 + 2 \\ 1 & -1 & x_3 - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \cdot (III) + (I)]{3 \cdot (II) + 4 \cdot (I)} \begin{pmatrix} -3 & -2 & x_1 - 1 \\ 0 & 10 & 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \\ 0 & -5 & x_1 + 3 \cdot x_3 - 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2 \cdot (III) + (II)]{} \begin{pmatrix} -3 & -2 & x_1 - 1 \\ 0 & 10 & 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \\ 0 & 0 & 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 - 6 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform Ebene E:

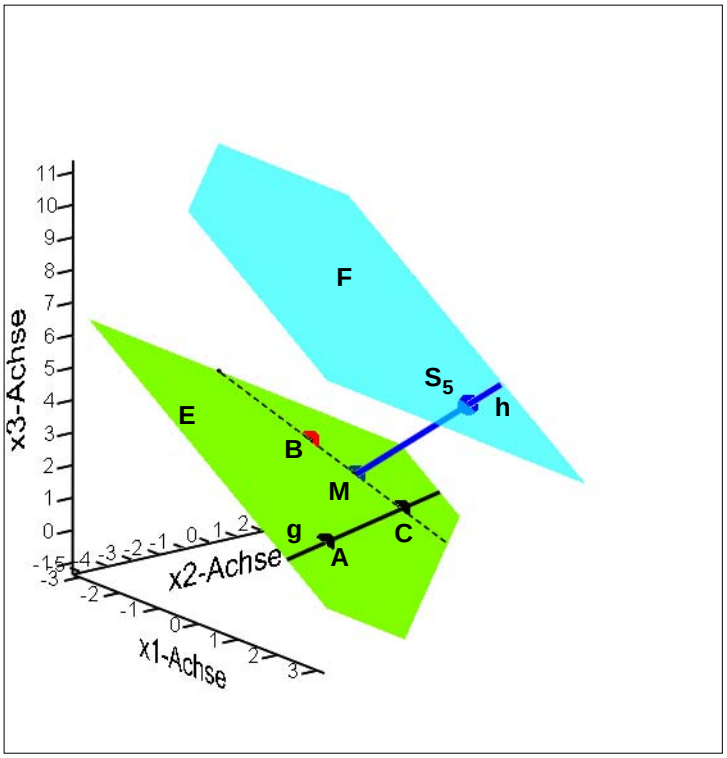
$$6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 2 = 0$$

Teilaufgabe 2.4 (7 BE)
Ermitteln Sie eine Gleichung einer Ebene F, die parallel zu E verläuft und den Punkt S_5 enthält. Erstellen Sie eine Skizze, die die Ebenen E, F, die Punkte A, B, C, M und S_5 und die Gerade h enthält und folgern Sie daraus die gegenseitige Lage der Geraden h und AC.

Ebene F: $2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + a = 0$

$S_5 \in$ F: $2 \cdot 2 + 2 + 2 \cdot 5 + a = 0$ **auflösen**, $a \rightarrow -16$

Ebene F: $2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 16 = 0$



Die Geraden h und AC verlaufen windschief.