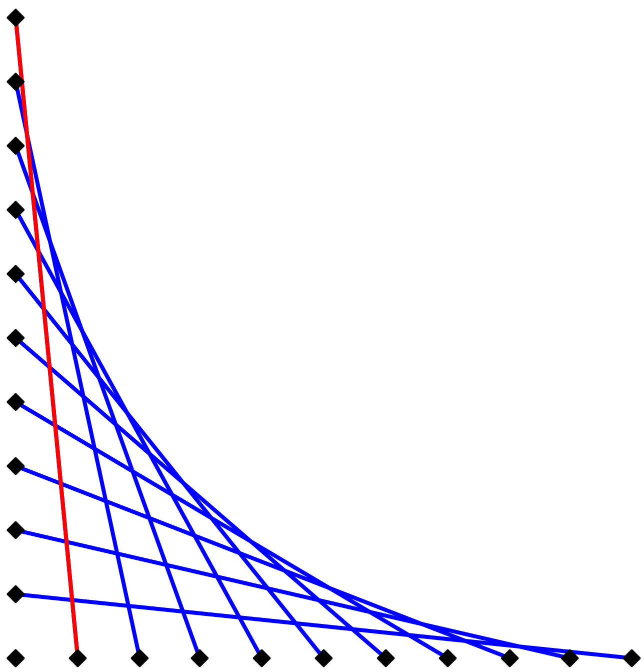
mathphys-online

# LINEARE FUNKTIONEN



## Inhaltsverzeichnis



Graphiken erstellt mit Mathcad 15

# Lineare Funktionen

## 1 Zuordnungsvorschrift, Funktionsgraph

Definition

Eine Funktion f mit der Zuordnungsvorschrift $\mathbf{f: IR \rightarrow IR,\ x \mapsto y = a\,x + b}$
heißt ***lineare Funktion***.

Im Folgenden wird die funktionale Schreibweise $\mathbf{f(x) = a\,x + b}$ mit $\mathbf{x,\ a,\ b \in IR}$ verwendet.

Bezeichnungen

$y = a\,x + b$ heißt ***Funktionsgleichung***, $f(x) = a\,x + b$ heißt ***Funktionsterm***.
$G_f$ ist der ***Graph von f*** in einem (kartesischen) Koordinatensystem.

Beispiel

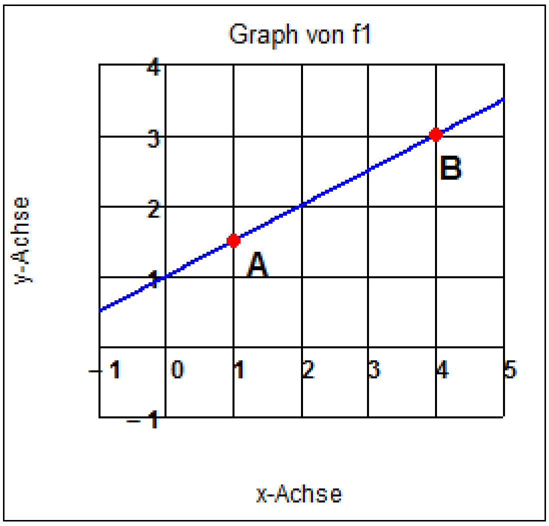
Gegeben sind die Funktionen $f_1$ und $f_2$ mit den Funktionstermen
$f_1(x) = \frac{1}{2}\,x + 1$ und $f_2(x) = -\frac{3}{4}\,x + 3$, wobei $x \in IR$.
Zeichnen Sie die zugehörigen Graphen $G_{f_1}$ und $G_{f_2}$.

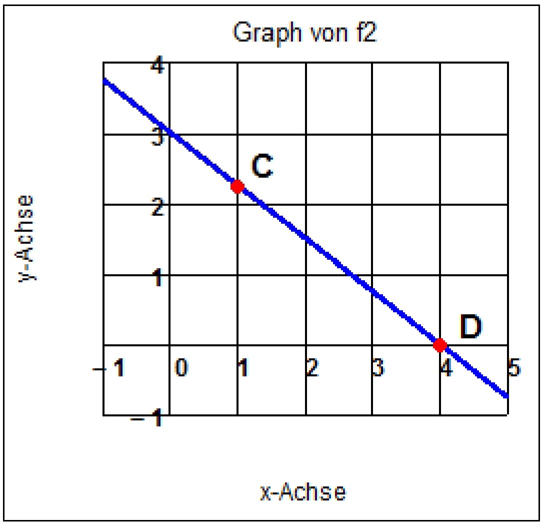
Lösung

Für das Zeichnen einer Geraden genügen zwei beliebig gewählte Stellen $x_1$ und $x_2$,
zu denen jeweils die y-Koordinaten für die Punkte A und B bzw. C und D berechnet werden.

$f_1(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow A(1/1{,}5)$ $\qquad$ $f_2(1) = \frac{5}{4} \Rightarrow C(1/2{,}25)$

$f_1(4) = 3 \Rightarrow B(4/3)$ $\qquad$ $f_2(4) = 0 \Rightarrow D(4/0)$



## 2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=ax+b$ mit $x, a, b \in IR \wedge a \neq 0$
Schnitt mit der x-Achse über die Bedingung: $y=0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad ax+b=0$

Lösen der linearen Gleichung liefert die ***Nullstelle*** $x_0=-\frac{b}{a} \quad \wedge \quad a \neq 0$.

Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat die Koordinaten $S_x\left(-\frac{b}{a}/0\right)$.

Schnitt mit der y-Achse über die Bedingung: $x=0 \quad \Leftrightarrow \quad f(0)=a\cdot 0+b=b$
Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $S_y(0/b)$.

Bemerkung
$a=0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow f(x)=b$ besitzt keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse.
$a=0 \wedge b=0 \Rightarrow f(x)=0$ ist die x-Achse.

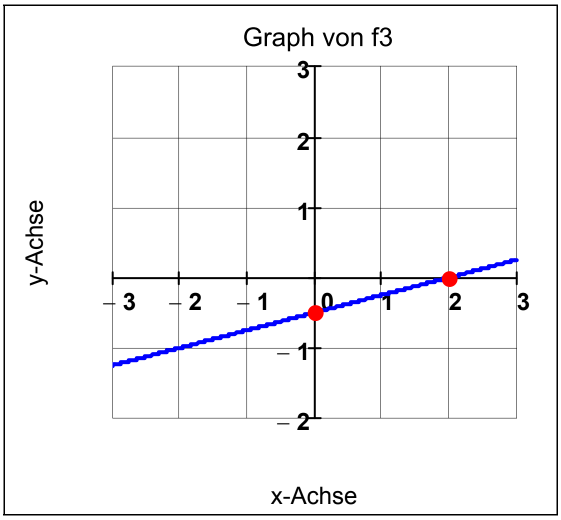
Beispiel: Gegeben sind die Funktionsterme $f_3$, $f_4$ und $f_5$.
Gesucht sind jeweils die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

$$f_3(x)=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$$

$$f_3(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow x_0=2 \Rightarrow S_x(2/0)$$

$$f_3(0)=-\frac{1}{2} \Rightarrow S_y(0/-0{,}5)$$

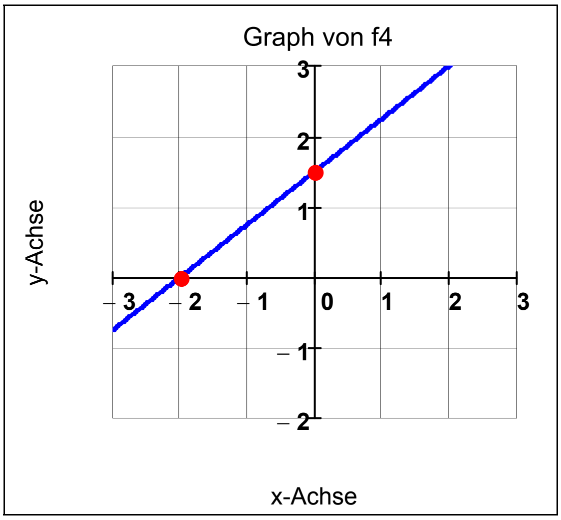



$$f_4(x)=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$$

$$f_4(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x+\frac{3}{2}=0$$

$$\Rightarrow x_0=-2 \Rightarrow S_x(-2/0)$$

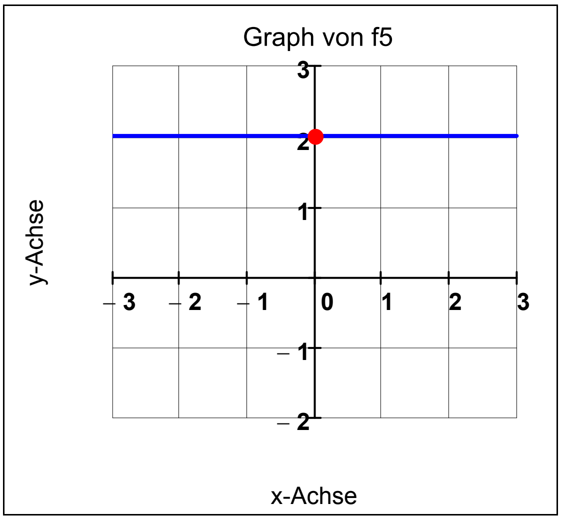
$$f_4(0)=\frac{3}{2} \Rightarrow S_y(0/1{,}5)$$



$f_5(x) = 2$

$f_5(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 = 0$ nicht möglich, also existieren keine Nullstellen.

$f_5(0) = 2 \;\Rightarrow\; S_y(0/2)$




## 3 Schnittpunkt von Geraden

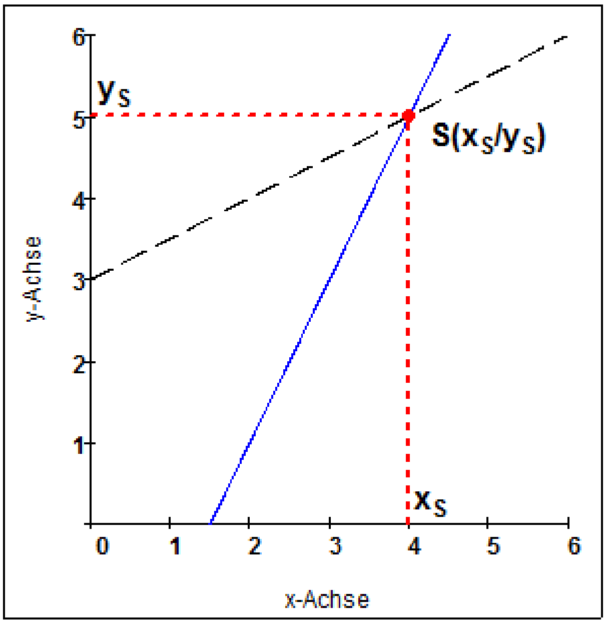
Gegeben: $g_1(x) = m_1 \cdot x + t_1$; $g_2(x) = m_2 \cdot x + t_2$; mit $x \in \mathbb{R}$ und $m_1 \neq m_2$.
Gesucht: Schnittpunkt $S(x_S/y_S)$

Allgemeine Lösung

Der Punkt S liegt auf beiden Geraden.
Das **Einsetzen von Punkt S in die Funktionsterme liefert ein Gleichungssystem:**

$S \in g_1:\; y_S = m_1 \cdot x_S + t_1 \quad (1)$
$S \in g_2:\; y_S = m_2 \cdot x_S + t_2 \quad (2)$ GLS

Das Gleichungssystem besteht aus zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. Da auf der linken Seite jeweils der gleiche Term steht, löst man es über das **Gleichsetzungsverfahren.**




(1) = (2): $m_1 \cdot x_S + t_1 = m_2 \cdot x_S + t_2$

Auflösen nach $x_S$: $(m_1 - m_2) \cdot x_S = t_2 - t_1 \;\big|\, :(m_1 - m_2) \neq 0$

Da nach Vors. $m_1 \neq m_2$ gilt: $x_S = \dfrac{t_2 - t_1}{m_1 - m_2}$

Einsetzen von $x_S$ in einen der beiden Funktionsterme, z. B. $g_1$, also:

$$y_S = g_1(x_S) = m_1 \cdot \frac{t_2 - t_1}{m_1 - m_2} + t_1 = \frac{m_1 t_2 - m_2 t_1}{m_1 - m_2}.$$

Beispiel

$g_1(x) = 2x - 3;\; g_2(x) = \frac{1}{2}x + 3;$

$$g_1 \cap g_2 : g_1(x) = g_2(x) \;\Leftrightarrow\; 2x - 3 = \frac{1}{2}\cdot x + 3$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{3}{2}x = 6$$

$$\Leftrightarrow\; x_S = 4$$

Funktionswert: $y_S = g_1(x_S) = g_1(4) = 2\cdot 4 - 3 = 5$

Schnittpunkt: S(4/5)

## 4 Geradenscharen, Interpretation der Parameter

Allgemein: $f(x) = m\cdot x + t \;\wedge\; x, m, t \in IR$

### 4.1 Das Geradenbüschel

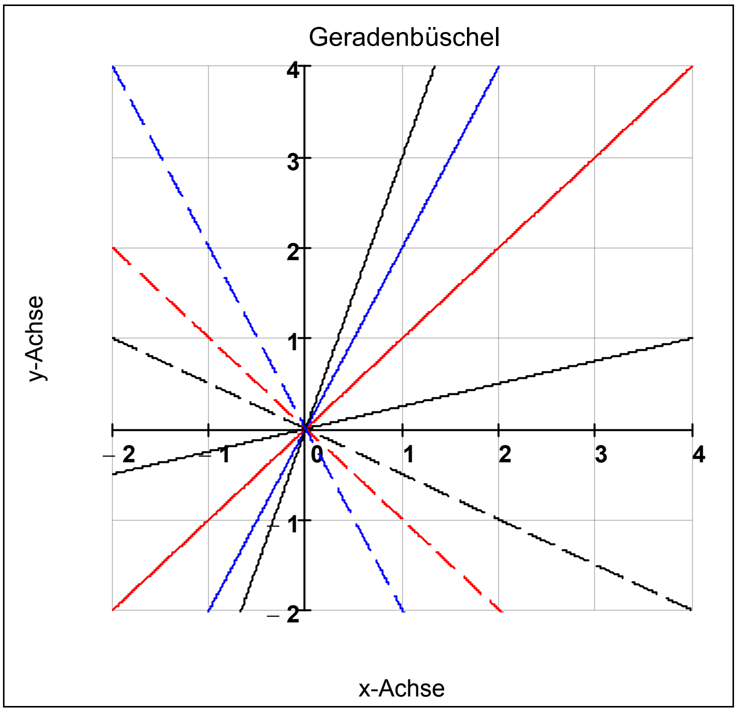
Gegeben sind die Geraden $f_m(x) = m\cdot x$ mit $x \in IR$ und $m \in \{-2; -1; -0{,}5; 0{,}25; 1; 2; 3\}$
Gesucht ist der Einfluss des Parameters m.

Welcher Graph gehört zu welchem Parameter?

Man stellt fest:

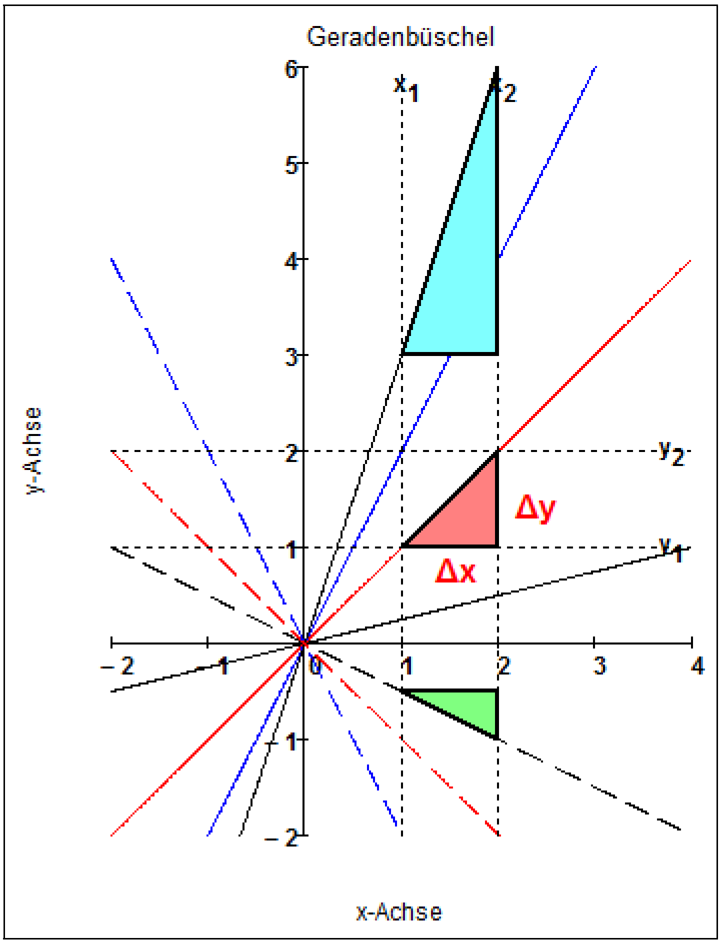
(1) Die Funktionenschar $f_m(x)$ liefert ein ***Geradenbüschel*** durch den Punkt P(0/0).

(2) Für m>0 gilt:
Je größer m, desto „steiler“ ist die Gerade.



Mathematische Formulierung

Der Parameter m charakterisiert den Zuwachs $\Delta y$ pro fest gewähltem $\Delta x$.




Definition der Steigung

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Bezeichnungen

(1) Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heißt **Differenzenquotient**.

(2) Für $m > 0$ steigt die Gerade.

(3) Für $m < 0$ fällt die Gerade.

(4) $m = 0$: Die Gerade heißt **konstante Funktion**.
Sie ist parallel zur x-Achse oder die x-Achse selbst.

Spezialfälle

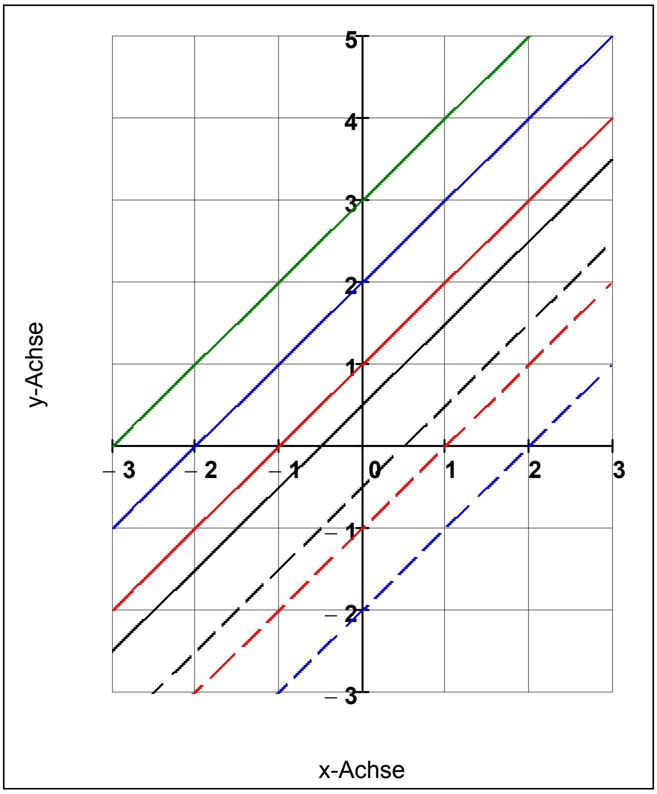
| | |
|---|---|
| $f(x) = x$: | **Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten.** |
| $f(x) = -x$: | **Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten.** |
| $y = t \wedge t \neq 0$: | **Parallele zur x-Achse**, sie ist weder steigend noch fallend. |
| $t = 0 \Rightarrow y = 0$: | **x-Achse** ist weder steigend noch fallend. |

**Warnung**

| | |
|---|---|
| $x = x_0 \wedge x_0 \neq 0$: | Die **Parallele zur y-Achse ist <u>keine</u> Funktion.** |
| $x = 0$ | Die **y-Achse ist keine Funktion.** |

## 4.2 Die Parallelenschar

Gegeben sind die Geraden $f_t(x) = x + t$ mit $x \in \mathrm{IR}$ und $t \in \{ -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 \}$.
Gesucht ist der Einfluss des Parameters t.
Welcher Graph gehört zu welchem Parameter?




Man stellt fest:

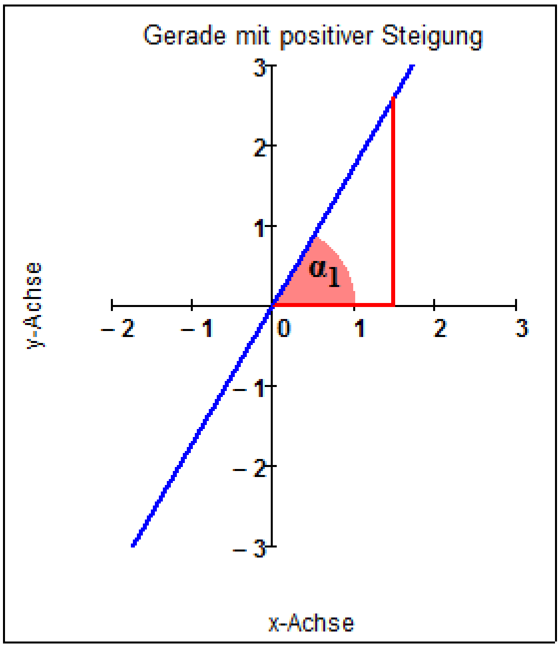
(1) Die Funktionenschar $f_t(x)$ liefert eine ***Parallenschar***.

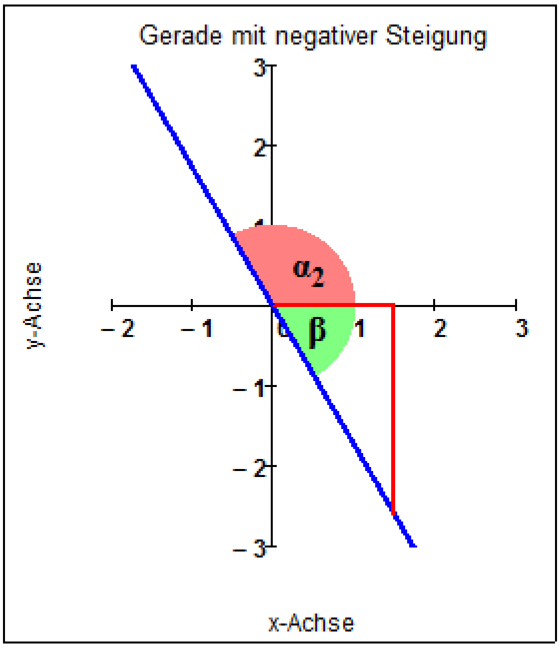
(2) Man nennt t den ***Achsenabschnitt*** auf der y–Achse.

## 5 Neigungswinkel von Geraden

### 5.1 Neigungswinkel der Ursprungsgeraden

Definition
Der Steigungswinkel einer Geraden g ist derjenige im mathematisch positiven Sinn gemessene Winkel $\alpha_1$ bzw. $\alpha_2$, den die Gerade mit der **positiven** x-Achse einschließt.




Betrachtet man im (rechtwinkligen) Steigungsdreieck das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, so entspricht das dem Tangens des Neigungswinkels.

$m > 0: \tan(\alpha_1) = m \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arctan(m)$
$m < 0: \tan(\beta) = m \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctan(m);$
Da der Winkel $\beta < 0$ nicht im mathematisch positiven Sinn ausgegeben wird, wird der Neigungswinkel umgerechnet: $\alpha_2 = 180° - |\beta|$

**Neigungswinkel:**

$$\boxed{\tan(\alpha) = m \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \begin{cases} \arctan(m) & \text{falls} \quad m > 0 \\ 180° - |\arctan(m)| & \text{falls} \quad m < 0 \end{cases}}$$

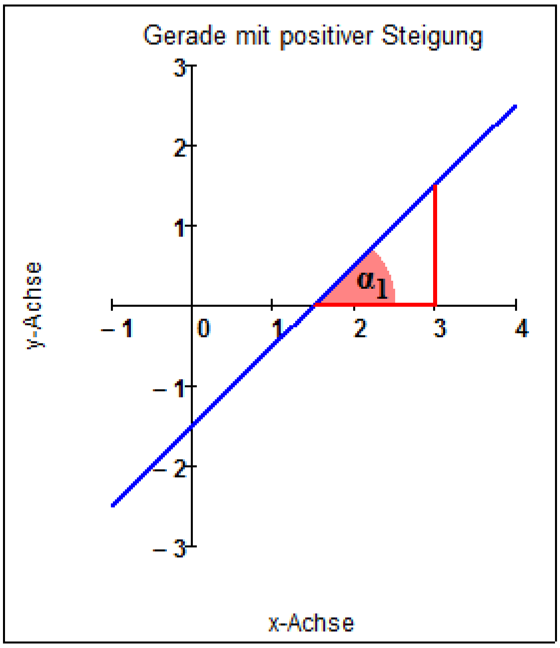
Beispiel

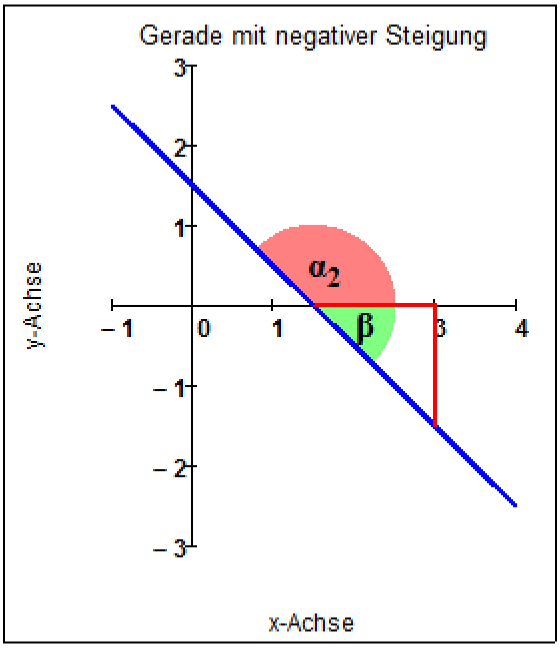
$g_1(x) = \sqrt{3}\,x$; positive Steigung: $m = \sqrt{3}$
Neigungswinkel: $\tan(\alpha_1) = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = 60°;$

$g_2(x) = -\sqrt{3}\,x$; negative Steigung: $m = -\sqrt{3}$
Neigungswinkel: $\tan(\beta) = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -60°;$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 = 180° - |-60°| = 120°$$

### 5.2 Neigungswinkel einer beliebigen Geraden




Berechnung des Neigungswinkels wie bei den Ursprungsgeraden.

<u>Beispiel</u>

$g_1(x) = x - 1{,}5$ ; positive Steigung: $m = 1$

Neigungswinkel: $\tan(\alpha_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arctan(1) = 45°$ ;

$g_2(x) = -x + 1{,}5$ ; negative Steigung: $m = -1$

Neigungswinkel: $\tan(\beta) = -1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctan(-1) = -45°$ ;

$\Rightarrow \quad \alpha_2 = 180° - |-45°| = 135°$

# 6 Schnittwinkel von Geraden

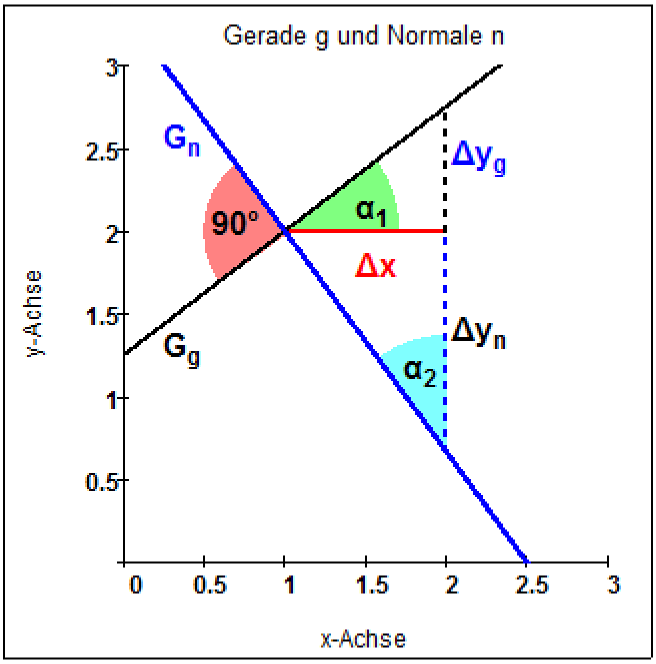
## 6.1 Senkrechte Geraden

Gegeben

Gerade g mit $g(x) = m_g \cdot x + t_g$ und die dazu senkrechte Gerade n (genannt auch ***Normale***) mit $n(x) = m_n \cdot x + t_n$.

Gesucht

Zusammenhang zwischen den Steigungen $m_g$ und $m_n$.




Allgemeine Lösung

Für die Steigungsdreiecke gilt:

Gerade g: $\tan(\alpha_1) = \dfrac{\Delta y_g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y_g}{1} = m_g$

Gerade n: $\tan(\alpha_2) = \dfrac{\Delta x}{\Delta y_n} = \dfrac{1}{\Delta y_n} = \dfrac{-1}{m_n}$

Die Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ sind identisch (Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind gleich).

Also gilt: $\alpha_1 = \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \tan(\alpha_1) = \tan(\alpha_2)$

Daraus folgt: $m_g = \dfrac{-1}{m_n} \quad \Leftrightarrow \quad m_g \cdot m_n = -1$

Es gilt: $\boxed{m_g \cdot m_n = -1 \quad \Leftrightarrow \quad g \perp n}$

Beispiel

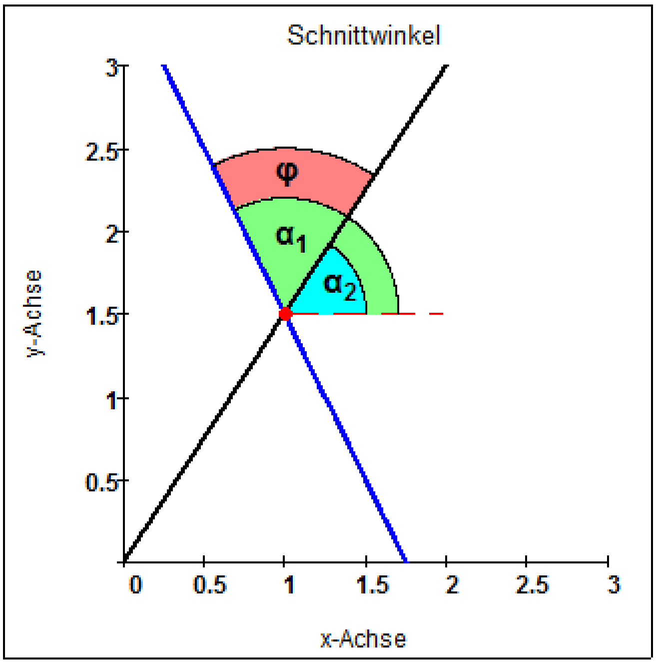
$g(x) = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$; $n(x) = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{10}{3}$

$m_g = \dfrac{3}{4}$; $m_n = -\dfrac{4}{3}$; $m_g \cdot m_n = \dfrac{4}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right) = -1$

### 6.2 Beliebige nicht senkrechte Geraden

Gegeben: $g_1(x) = m_1 \cdot x + t_1$; $g_2(x) = m_2 \cdot x + t_2$; $m_1 \neq m_2$

Gesucht: Schnittwinkel der beiden Geraden




Beispiel:

$g_1(x) = -2 \cdot x + \frac{7}{2}$ $\quad m_1 = -2$

$g_2(x) = \frac{3}{2} x$ $\quad m_2 = \frac{3}{2}$

Einzelne Neigungswinkel:

$\alpha_1 = 180° - \arctan(|-2|) = 116{,}56°$

$\alpha_2 = \arctan(1{,}5) = 56{,}31°$

Schnittwinkel:

$\varphi = \alpha_1 - \alpha_2 = 116{,}56° - 56{,}31° = 60{,}25°$

Berechnung nach der Formel:

$$\varphi = \arctan\left(\left|\frac{-2-1{,}5}{1+(-2)\cdot 1{,}5}\right|\right) = \arctan\left(\left|\frac{-3{,}5}{-2}\right|\right) = \arctan(|1{,}75|) = 60{,}25°$$

Allgemeine Lösung:

Der Schnittwinkel $\varphi$ zweier Geraden ist immer der kleinere der beiden Winkel, welchen die beiden Geraden miteinander bilden.
Der Schnittwinkel $\varphi$ ergibt sich aus den Neigungswinkeln $\alpha_1$ und $\alpha_2$: $\varphi = |\alpha_1 - \alpha_2|$

$$\tan(\varphi) = \tan(|\alpha_1 - \alpha_2|)$$

Mit dem **Additionstheorem** für den Tangens gilt:

$\tan(\varphi) = \frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)}{1 + \tan(\alpha_1) \cdot \tan(\alpha_2)}$ mit $0° < \varphi < 90°$.

Aus der Steigung lässt sich der Tangens des Winkels berechnen:

$$\boxed{\tan(\varphi) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \quad \wedge \quad 1 + m_1 \cdot m_2 \neq 0}$$

Merkhilfe Seite 2

Bemerkung:

$\tan(\varphi)$ ist nicht definiert für $\varphi = 90°$, der Quotient ist nicht definiert, falls $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$.

Dann gilt: $\boxed{1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -1}$

Das heißt, die **Geraden stehen senkrecht aufeinander**.

# 7 Bestimmung des Funktionsterms einer Geraden

## 7.1 Punkt-Steigungsform

Gegeben: Punkt $P(x_0 / y_0)$ und die Steigung m.
Gesucht: Funktionsterm f(x) der zugehörigen Geraden.

Beispiel 1

Geg.: $P(1/1{,}25)$; $m = \frac{3}{4}$;

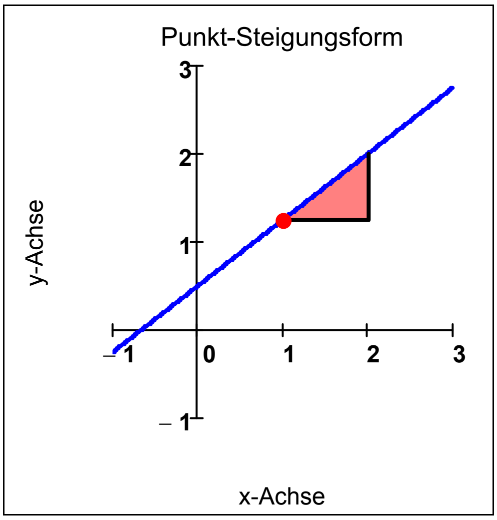
Ansatz: $f(x) = m \cdot x + t$

Also: $f(x) = \frac{3}{4} \cdot x + t$

$P \in G_f$: $f(1) = 1{,}25 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} \cdot 1 + t = 1{,}25$

Auflösen nach t: $t = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

Eingesetzt: $f(x) = \frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{2}$




Allgemeine Lösung

Ansatz für eine lineare Funktion: $f(x) = m \cdot x + t$

Bestimmung von t: $P \in G_f$: $f(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot x_0 + t = y_0 \quad \Rightarrow \quad t = -m \cdot x_0 + y_0$

Einsetzen in f(x): $f(x) = m \cdot x - m \cdot x_0 + y_0$

Umformung: $\boxed{f(x) = m \cdot (x - x_0) + y_0}$ **Punkt-Steigungsform**

## 7.2 Zwei-Punkteform

Gegeben: Zwei Punkte $P(x_0/y_0)$ und $A(x_1/y_1)$
Gesucht: Funktionsterm der zugehörigen Geraden g.

Beispiel 2

Geg.: $A(0{,}5/1{,}25)$; $B(2{,}5/2{,}25)$

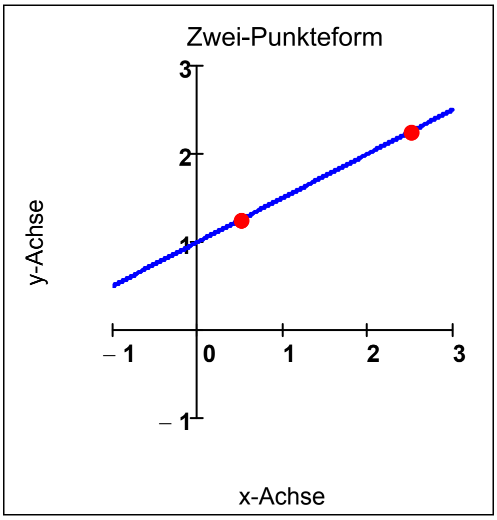
Ansatz: $f(x) = m \cdot x + t$

Steigung: $m = \frac{2{,}25 - 1{,}25}{2{,}5 - 0{,}5} = 0{,}5$

$\Rightarrow \quad f(x) = 0{,}5\,x + t$

$A \in G_f \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 \cdot 0{,}5 + t = 1{,}25 \quad \Rightarrow \quad t = 1$

$\Rightarrow \quad f(x) = 0{,}5\,x + 1$



Allgemeine Lösung
Ansatz für lineare Funktion: $g(x) = m \cdot x + t$
Einsetzen der Punkte P und A in den Funktionsterm liefert ein Gleichungssystem (GLS):

$$\text{GLS} \quad \begin{array}{l} P \in g: \quad (1) \; y_0 = m \cdot x_0 + t \\ A \in g: \quad (2) \; y_1 = m \cdot x_1 + t \end{array}$$

Das Gleichungssystem besteht aus zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. Man löst es z. B. über das ***Einsetzungsverfahren*** oder ***Additionsverfahren***.

Hier das Additionsverfahren (2) – (1): $y_1 - y_0 = m \cdot (x_1 - x_0)$

Wegen $x_1 \neq x_0$ auflösen nach m: $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

m wird in (1) oder (2) eingesetzt: $y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot x_0 + t$

Auflösen nach t: $t = y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot x_0$

m und t werden in den Funktionsterm eingesetzt: $g(x) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot x + \left( y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot x_0 \right)$

Umformung: $\boxed{g(x) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + y_0 \quad \wedge \quad x_1 \neq x_0}$ **Zwei-Punkteform**

### 7.3 Analytische Darstellungsformen

Die Zuordnungsvorschrift ist in Form einer Gleichung gegeben.

**Explizite Darstellung:**
Die Funktion ist nach der Variablen y aufgelöst: $y = f(x) \quad \wedge \quad f(x) = m \cdot x + t$

**Implizite Darstellung:**
Die Funktion ist **nicht** nach der Variablen y **aufgelöst**: $F(x, y) = 0 \;\wedge\; F(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c$

**Parameterdarstellung:**
Die Funktion ist in Abhängigkeit vom **Parameter t** gegeben: $x = x(t) \wedge y = y(t)$

Beispiel

Explizite Form: $f(x) = 2 \cdot x + 4$

Implizite Form: $F(x, y) = 0 \quad \wedge \quad -6 \cdot x + 3 \cdot y - 12 = 0$
Auflösen nach y: $3 \cdot y = 6 \cdot x + 12 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \cdot x + 4$

Parameterform: $x(t) = 2 \cdot t \quad \wedge \quad y(t) = 4 \cdot t + 4$
Eliminieren des Parameters aus der einen Gleichung und Einsetzen in die andere Gleichung:

$$t = \frac{x}{2} \quad \wedge \quad y = 4 \cdot \frac{x}{2} + 4 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 2 \cdot x + 4$$

## 8 Lage von Geraden zueinander

Gegeben sind die Geradenscharen $f_a(x) = a \cdot x + 1 \quad \wedge \quad g_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x + a \quad \wedge \quad a \in IR \setminus \{0\}$.

Gesucht: Anzahl der Schnittpunkte in Abhängigkeit des Parameters a.

Lösung: Berechnung des Schnittpunktes durch Gleichsetzen der Funktionswerte:

$f_a(x) = g_a(x)$: $\quad a \cdot x + 1 = \frac{1}{a} \cdot x + a \quad$ Multiplizieren mit a: $\quad a^2 \cdot x + a = x + a^2$

Sortieren nach x: $\quad (*) \quad (a^2 - 1) \cdot x = a^2 - a$

Auflösen nach x: $\quad x_S = \frac{a^2 - a}{a^2 - 1} = \frac{a \cdot (a-1)}{(a+1) \cdot (a-1)}$

Der Bruchterm existiert nur, falls $a^2 - 1 \neq 0$, dann darf gekürzt werden: $x_S = \frac{a}{a+1}$

Berechnung des y-Wertes: $\quad g_a(x_S) = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{a+1} + a = \frac{1 + a^2 + a}{a+1}$

Schnittpunktskoordinaten: $\quad S\left( \frac{a}{a+1} \,\middle|\, \frac{1 + a^2 + a}{a+1} \right)$ falls $a \neq \pm 1$

Speziell:

$a = 1$: $\quad (*) \quad (1^2 - 1) \cdot x = 1^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0 \quad$ wahre Aussage, identische Geraden

$a = -1 \quad (*) \quad ((-1)^2 - 1) \cdot x = (-1)^2 - (-1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2 \quad$ Widerspruch, parallele Geraden

**Merke**

In Abhängigkeit vom Parameter der Geradenscharen gibt es entweder

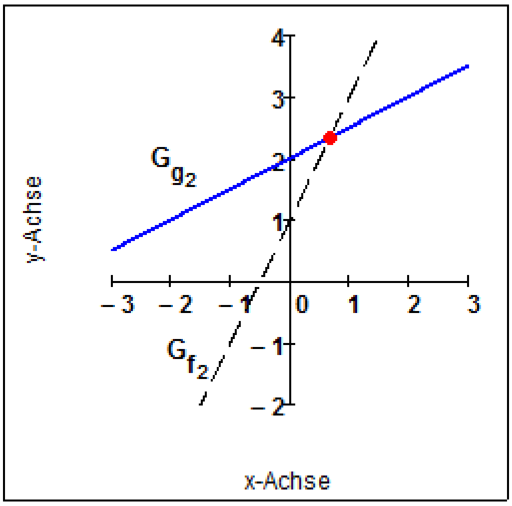
- **genau einen** Schnittpunkt **S($x_S$ / $y_S$)** oder
- **unendlich viele** Schnittpunkte (die Geraden sind **identisch**) oder
- **keine Schnittpunkte** (die Geraden sind **parallel**).

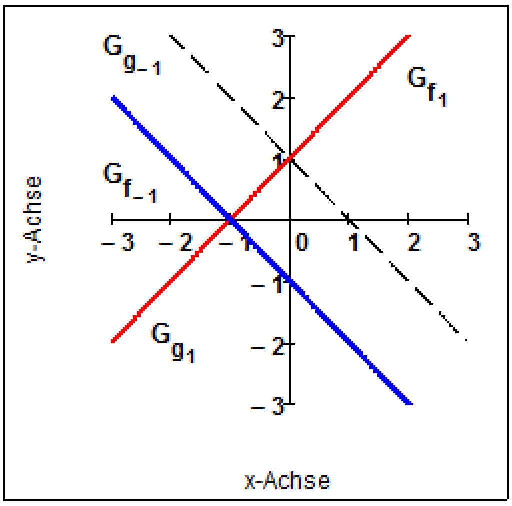
Beispiel:

$a = 2$: $\quad f_2(x) = 2 \cdot x + 1 \quad \wedge \quad g_2(x) = 0{,}5 \cdot x + 2$

$a = -1$: $\quad f_{-1}(x) = -x + 1 \quad \wedge \quad g_{-1}(x) = -x - 1$

$a = 1$: $\quad f_1(x) = x + 1 \quad \wedge \quad g_1(x) = x + 1$



## 9 Lineare Ungleichungen

Eine lineare Ungleichung hat die Form $ax+b>0$ bzw. $ax+b<0$

Algebraische Lösung der linearen Ungleichung

Ansatz: **Auflösen nach x.**

Beispiel 1

$ax+b>0 \quad \Leftrightarrow \quad ax>-b \,|\, :a$

1. Fall: $a>0 \quad \Rightarrow \quad x>-\frac{b}{a}$

Lösungsmenge: $L_1=\left\{x\in IR \,\middle|\, x>-\frac{b}{a}\right\}$

2. Fall: $a<0 \quad \Rightarrow \quad x<-\frac{b}{a}$

Lösungsmenge: $L_2=\left\{x\in IR \,\middle|\, x<-\frac{b}{a}\right\}$

Beispiel 2

$ax+b<0 \quad \Leftrightarrow \quad ax<-b \,|\, :a$

1. Fall: $a>0 \quad \Rightarrow \quad x<-\frac{b}{a}$

Lösungsmenge: $L_1=\left\{x\in IR \,\middle|\, x<-\frac{b}{a}\right\}$

2. Fall: $a<0 \quad \Rightarrow \quad x>-\frac{b}{a}$

Lösungsmenge: $L_2=\left\{x\in IR \,\middle|\, x>-\frac{b}{a}\right\}$

Ungleichungen mit mehreren linearen Termen, z. B.: $ax+b>cx+d$ bzw. $ax+b<cx+d$ in die Form $Ax+B>0$ bzw. $Ax+B<0$ bringen und dann nach x auflösen.

Dabei sind folgende ***äquivalente Umformungen*** erlaubt:
- Das Addieren bzw. Subtrahieren desselben Terms auf beiden Seiten der Ungleichung.
- Das Multiplizieren der Ungleichung mit einer positiven reellen Zahl unter Beibehalten des Ungleichungszeichens.
- Das Multiplizieren der Ungleichung mit einer negativen reellen Zahl unter Umdrehen des Ungleichungszeichens.

Beispiel 3

$$ax+b>cx+d$$
$$\Leftrightarrow \quad (a-c)x>d-b \,|\, :(a-c)$$

1. Fall: $a-c>0 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{d-b}{a-c}$

Lösungsmenge: $L_1=\left\{x\in IR \,\middle|\, x>\frac{d-b}{a-c}\right\}$

2. Fall: $a-c<0 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{d-b}{a-c}$

Lösungsmenge: $L_2=\left\{x\in IR \,\middle|\, x<\frac{d-b}{a-c}\right\}$

Beispiel 4

$$ax+b<cx+d$$
$$\Leftrightarrow \quad (a-c)x<d-b \,|\, :(a-c)$$

1. Fall: $a-c>0 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{d-b}{a-c}$

Lösungsmenge: $L_1=\left\{x\in IR \,\middle|\, x<\frac{d-b}{a-c}\right\}$

2. Fall: $a-c<0 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{d-b}{a-c}$

Lösungsmenge: $L_2=\left\{x\in IR \,\middle|\, x>\frac{d-b}{a-c}\right\}$

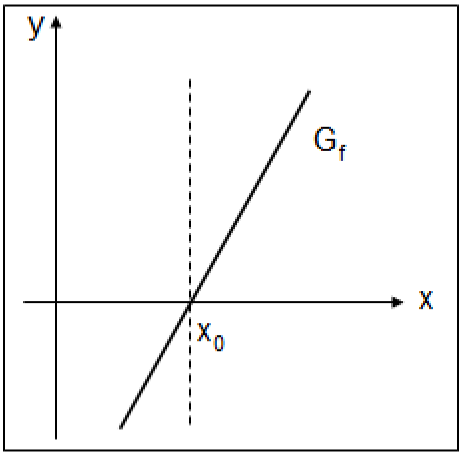
## Graphische Lösung der linearen Ungleichung

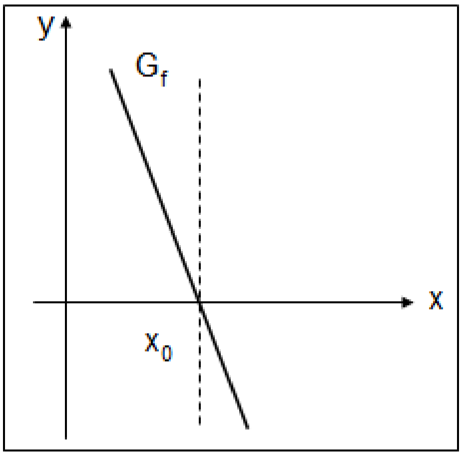
(1) Definieren eines Funktionsterms $f(x) = a\,x + b$ mit $a \neq 0$.

(2) Suchen der Nullstelle: $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; a\,x + b = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = -\frac{b}{a}$

(3) Skizzieren des Graphen $G_f$ mit Hilfe der Nullstelle $x_0$ und der Kenntnis des Vorzeichens von a.

Für $a > 0$ ergibt sich eine steigende Gerade. Für $a < 0$ ergibt sich eine fallende Gerade.




(4) Markieren des Bereiches des Graphen oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse. Die zugehörigen x-Werte bilden die Lösungsmenge der Ungleichung.

### Beispiel 1

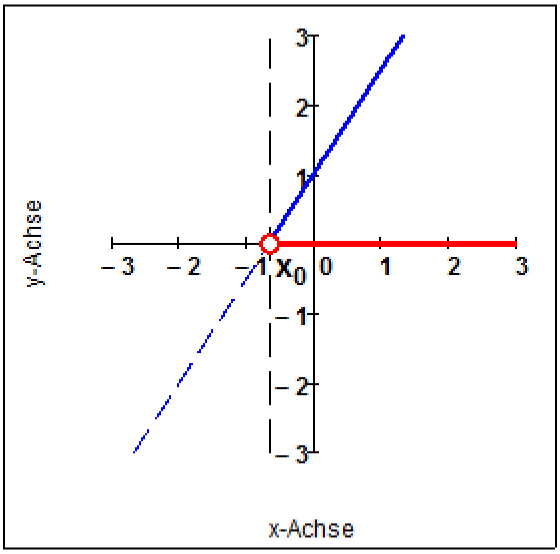
Ungleichung: $\frac{3}{2}x - 1 > 0$

Funktionsterm: $f_1(x) = \frac{3}{2}x - 1$

Nullstelle:

$f_1(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{2}x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = -\frac{2}{3}$

$f_1(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; L_1 = \left\{ x \in IR \,\middle|\, x > -\frac{2}{3} \right\}$



Beispiel 2

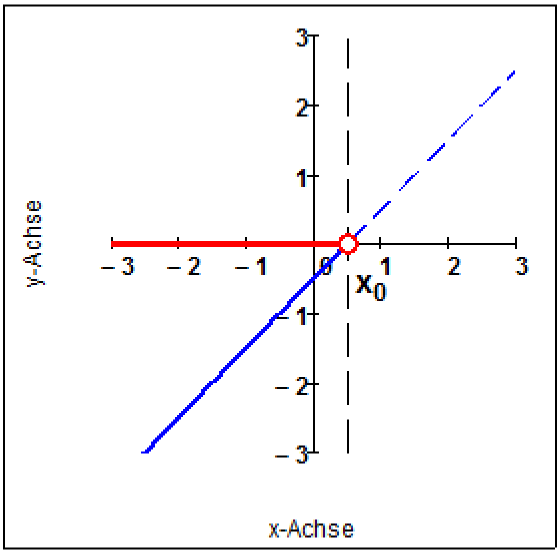
Ungleichung: $x - \frac{1}{2} < 0$

Funktionsterm: $f_2(x) = x - \frac{1}{2}$

Nullstelle:

$f_2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2}$

$f_2(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_2 = \left\{ x \in IR \middle| x < \frac{1}{2} \right\}$




Beispiel 3

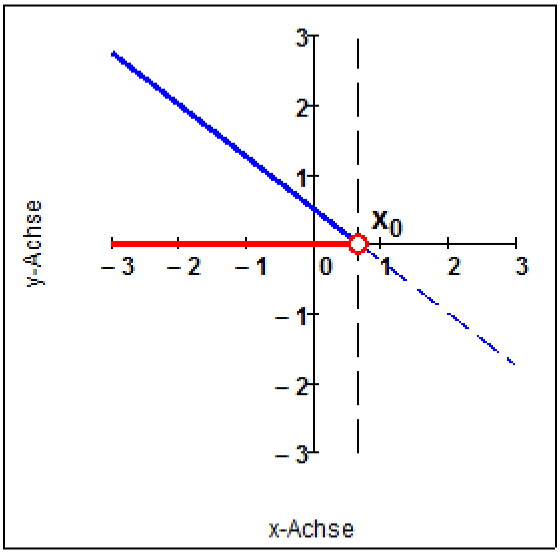
Ungleichung: $-\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} > 0$

Funktionsterm: $f_3(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Nullstelle:

$f_3(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{2}{3}$

$f_3(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_3 = \left\{ x \in IR \middle| x < \frac{2}{3} \right\}$




Beispiel 4

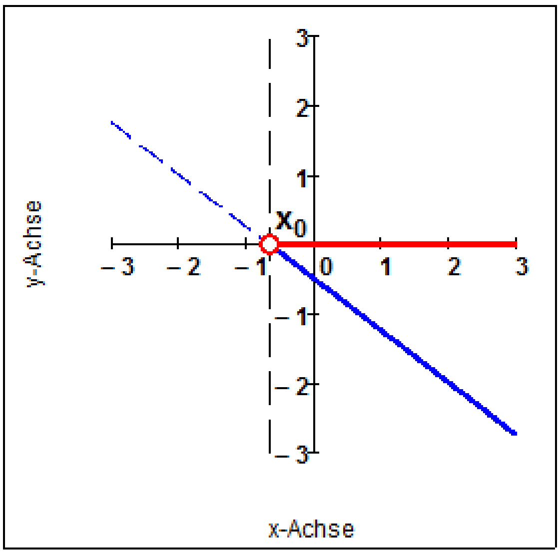
Ungleichung: $-\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} < 0$

Funktionsterm: $f_4(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

Nullstelle:

$f_4(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -\frac{2}{3}$

$f_4(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_4 = \left\{ x \in IR \middle| x > \frac{2}{3} \right\}$



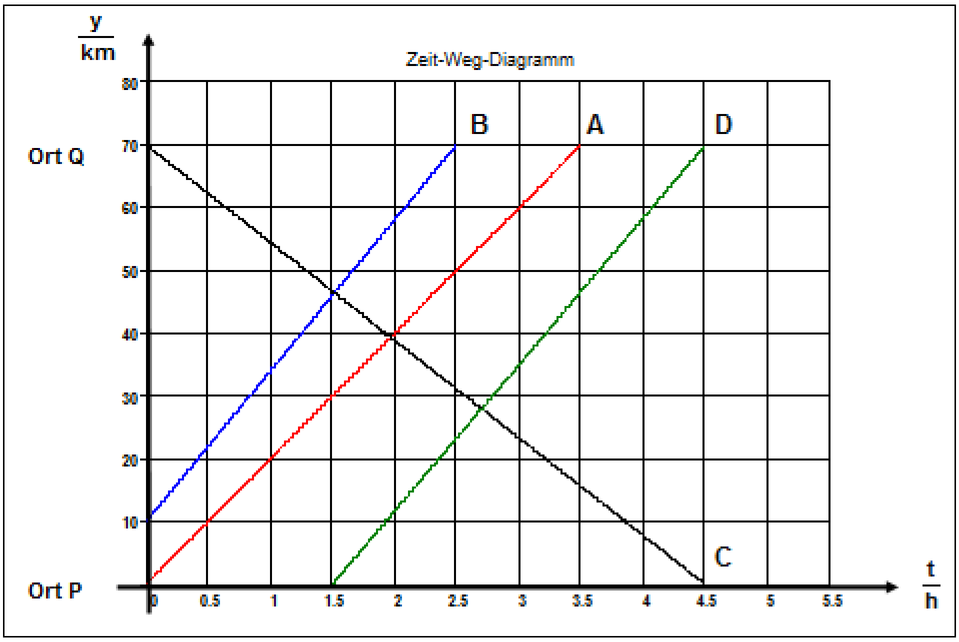
## 10 Physikalische Anwendungen

Aufgabe 1

Gegeben ist ein Diagramm, welches die Bewegungsabläufe der Radfahrer A, B, C und D wiedergibt.

a) Beschreiben Sie die einzelnen Bewegungsabläufe der Fahrer A, B, C und D mit Worten.

b) Bestimmen Sie die Funktionsterme der Bewegungsabläufe der Radfahrer A, B, C und D über die allgemeine Bewegungsgleichung für den Weg y in Abhängigkeit von der Zeit t: $y(t) = y_0 + v_0 \cdot t$




Lösung zu a)

A startet im Ort P und kommt nach 3,5 Stunden in Q an.

B startet 10 km vor Ort P (in Richtung Ort Q) und kommt nach 2,5 Stunden in Q an.

C startet in Ort Q und kommt nach 4,5 Stunden in P an.

D startet eineinhalb Stunden später in Ort P und kommt nach drei Stunden in Ort Q an.

Lösung zu b)

Radfahrer A: $y_A(t) = \frac{70\,km}{3{,}5\,h} \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad y_A(t) = 20\frac{km}{h} \cdot t$

Radfahrer B: $y_B(t) = 10\,km + \frac{60\,km}{2{,}5\,h} \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad y_B(t) = 10\,km + 24\frac{km}{h} \cdot t$

Radfahrer C: $y_C(t) = 70\,km - \frac{70\,km}{4{,}5\,h} \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad y_C(t) = 70\,km - 15{,}56\frac{km}{h} \cdot t$

Radfahrer D: $y_D(t) = \frac{70\,km}{3{,}0\,h} \cdot (t - 1{,}5\,h) \quad \Leftrightarrow \quad y_D(t) = 23{,}33\frac{km}{h} \cdot (t - 1{,}5\,h)$

Aufgabe 2

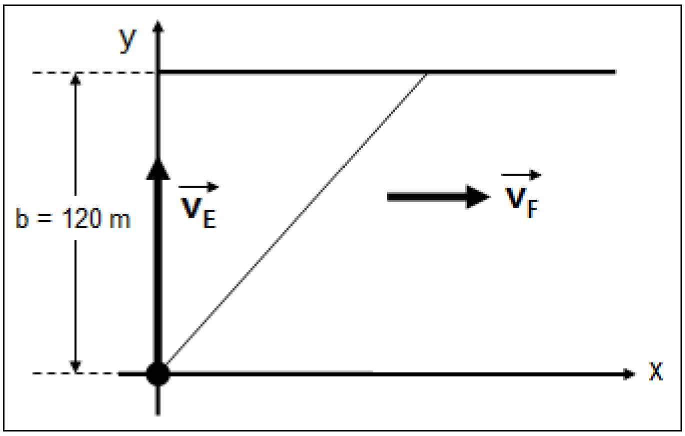
Ein Fluss der Breite $b = 120\text{ m}$ strömt von West nach Ost mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit $v_F = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ein Schiffchen fährt mit der konstanten Eigengeschwindigkeit $v_E = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ senkrecht von Süd nach Nord über einen Fluss. Das Schiffchen starte zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ im gewählten Koordinatenursprung.

a) Erstellen Sie eine Zeichnung in einem geeigneten Koordinatensystem.

b) Für Bewegungen gilt das Superpositionsgesetz, d. h. die Bewegung des Schiffchens kann in Komponenten zerlegt werden. Geben Sie die Bewegungsgleichungen an.

c) Bestimmen Sie die Bahnkurve des Schiffchens und geben Sie den Auftreffpunkt am gegenüberliegenden Ufer im Koordinatensystem an.

Lösung zu Teilaufgabe a)




Lösung zu Teilaufgabe b)

In x-Richtung: $x(t) = v_F \cdot t$

$\Rightarrow \quad x(t) = 2\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ Gleichung (1)

In y-Richtung: $y(t) = v_E \cdot t$

$\Rightarrow \quad y(t) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ Gleichung (2)

Gleichungen (1) und (2) sind die Parameterdarstellung der gesuchten Bahnkurve y(x).

Lösung zu Teilaufgabe b)

In x-Richtung: $x(t) = v_F \cdot t \quad \Rightarrow \quad x(t) = 2\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ Gleichung (1)

In y-Richtung: $y(t) = v_E \cdot t \quad \Rightarrow \quad y(t) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ Gleichung (2)

Gleichungen (1) und (2) sind die Parameterdarstellung der gesuchten Bahnkurve y(x).

Lösung zu Teilaufgabe c)

Der Parameter wird eliminiert:

Aus (1) $\quad t = \frac{x}{v_F}$;

Einsetzen in (2) $\quad y(x) = v_E \cdot \frac{x}{v_F} = \frac{v_E}{v_F} \cdot x$

Bahnkurve: $\quad y(x) = \frac{4\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = 2 \cdot x$

Auftreffpunkt am gegenüberliegenden Ufer: $y(x) = 120\,\text{m} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x = 120\,\text{m} \quad \Leftrightarrow \quad x_b = 60\,\text{m}$