Gebrochenrationale Funktionen 10 - Lösung

- Kurvendiskussion
- Polstellen
- Schiefe Asymptote
- Keine Extrempunkte

$\mathbf{ORIGIN} := 1$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := \dfrac{2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 6}{x - 2}$, $x \in D$.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und faktorisieren Sie den Funktionsterm.
Geben Sie die Nullstellen an.
b) Untersuchen Sie das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs.
Geben Sie die Art der Definitionslücke und alle Asymptoten an.
c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten (graphische Lösung und Lösung mit CAS).
Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle an.
d) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten (graphische Lösung und Lösung mit CAS).
Geben Sie die maximalen Krümmungsintervalle an.
e) Zeichnen Sie den Graphen von f mithilfe aller bisherigen Ergebnisse.
Beschreiben Sie die Eigenschaften der Äste des Funktionsgraphen mit Worten.

Teilaufgabe a)

Nenner auslesen: $n(x) := \mathbf{denom}(f(x)) = x - 2$

Nullstellen des Nenners: $n(x) = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \ \mathbf{auflösen}, x \ \rightarrow 2$

Definitionsmenge: $D = \mathrm{IR} \setminus \{ 2 \}$

Nenner faktorisieren: $n(x) = x - 2$

Zähler auslesen: $z(x) := \mathbf{numer}(f(x)) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 6$

Zähler faktorisieren: $z(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$

Faktorisierter Funktionsterm: $f(x) := \dfrac{2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)}{x - 2}$

Nullstellen: $f(x) = 0 \ \mathbf{auflösen}, x \ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x_1 := 1 \qquad x_2 := 3$

Teilaufgabe b)

Linksseitige Annäherung an $x_0 := 2$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)}{x - 2} \rightarrow \infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0 := 2$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)}{x - 2} \rightarrow -\infty$$

$\Rightarrow \quad x_0 = 2$ ist Polstelle 1. Ordnung.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 6}{x - 2} \to -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 6}{x - 2} \to \infty$$

Bestimmung der schiefen Asymptote durch Polynomdivision mit Rest:

$$f(x) \text{ parfrac } \to 2 \cdot x - \frac{2}{x - 2} - 4 \qquad \Rightarrow \qquad g(x) := 2 \cdot x - 4$$

Teilaufgabe c)

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \to \frac{2 \cdot (x - 3)}{x - 2} + \frac{2 \cdot x - 2}{x - 2} - \frac{(x - 3) \cdot (2 \cdot x - 2)}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) \text{ vereinfachen } \to \frac{2 \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 5\right)}{(x - 2)^2}$$

Zähler abrufen: $z'(x) := \text{numer}(f'(x)) \to 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 10$

Horizontale Tangenten: $z'(x) = 0 \to 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 10 = 0 \text{ auflösen}, x \to \begin{pmatrix} 2 + i \\ 2 - i \end{pmatrix}$ keine Lösung

Graphische Lösung:

		$x \neq 2$	
Zähler	**pos**	¦	**pos**
Nenner	**pos**	¦	**pos**
f '(x)	**pos**	¦	**pos**
G_f	**sms**	¦	**sms**
		Polstelle	

Mathcad-Lösung:

$$f'(x) > 0 \text{ vereinfachen } \to \frac{2 \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 5\right)}{(x - 2)^2} > 0 \text{ auflösen}, x \to 2 < x \vee x < 2$$

$$f'(x) < 0 \text{ vereinfachen } \to \frac{2 \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 5\right)}{(x - 2)^2} < 0 \text{ auflösen}, x \to \frac{2 \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 5\right)}{(x - 2)^2} < 0$$

keine Lösung

Maximale Monotonieintervalle:

G_f ist streng monoton steigend in $]\, -\infty\, ;\, 2\, [$ und G_f ist streng monoton steigend in $]\, 2\, ;\, \infty\, [$.

Teilaufgabe d)

$$f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x) \rightarrow \frac{4}{x-2} - \frac{2 \cdot (2 \cdot x - 2)}{(x-2)^2} - \frac{2 \cdot x - 6}{(x-2)^2} - \frac{2 \cdot (x-3)}{(x-2)^2} + \frac{2 \cdot (x-3) \cdot (2 \cdot x - 2)}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) \text{ vereinfachen } \rightarrow -\frac{4}{(x-2)^3}$$

Graphische Lösung:

	$x \neq 2$	
Zähler	**neg**	**neg**
Nenner	**neg**	**pos**
f ''(x)	**pos**	**neg**
G_f	**lk**	**rk**
	Polstelle	

Mathcad-Lösung:

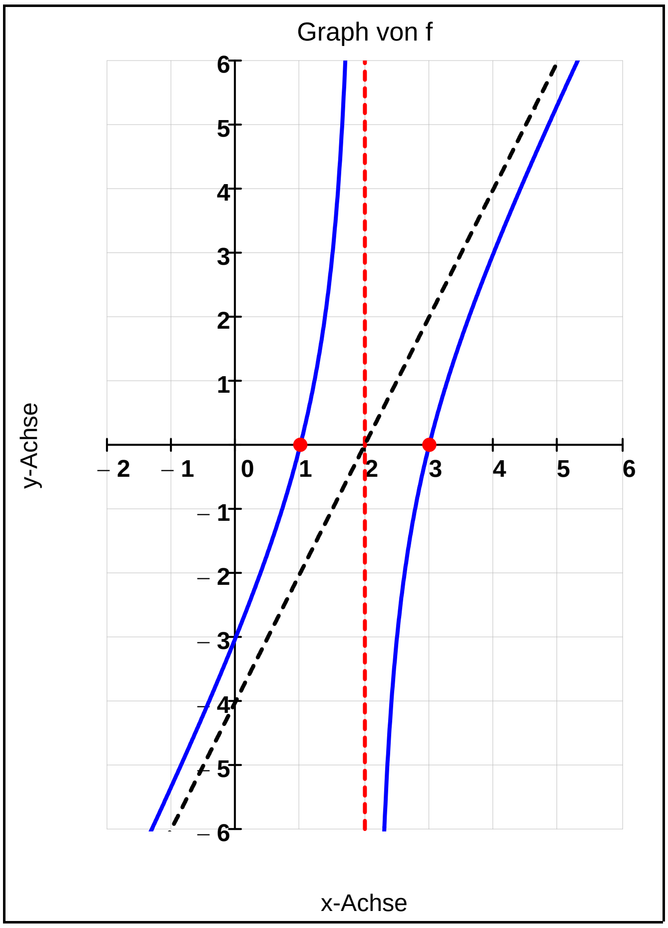
$$f''(x) > 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow -\frac{4}{(x-2)^3} > 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow x < 2$$

$$f''(x) < 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow -\frac{4}{(x-2)^3} < 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 2 < x$$

Maximale Krümmungsintervalle:

G_f ist linksgekrümmt in $]\, -\infty\, ;\, 2\, [$ und G_f ist rechtsgekrümmt in $]\, 2\, ;\, \infty\, [$.

Teilaufgabe e)



Der Graph von f ist für $x < 2$ (linker Ast)

- streng monoton steigend,
- linksgekrümmt,
- besitzt eine Nullstelle $\mathbf{x_1} = \mathbf{1}$.

Der Graph von f ist für $x > 1$ (rechter Ast)

- streng monoton steigend,
- rechtsgekrümmt,
- besitzt eine Nullstelle $\mathbf{x_2} = \mathbf{3}$.