

## Gebrochenrationale Funktionen Aufgaben zu Ableitungen



### Aufgabe

Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge sowie die erste und die Ableitung.

#### Teilaufgabe a)

$$f(x, a) := \frac{2 \cdot x + a}{x + 2 \cdot a} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2 \cdot a\}$$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{2}{2 \cdot a + x} - \frac{a + 2 \cdot x}{(2 \cdot a + x)^2} = \frac{3 \cdot a}{(2 \cdot a + x)^2}$$

$$f''(x, a) := \frac{d}{dx} f'(x, a) = -\frac{6 \cdot a}{(2 \cdot a + x)^3}$$

#### Teilaufgabe b)

$$f(x, a) := \frac{-x^2 - 4x + a}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{x^2 + 4 \cdot x - a}{x^2} - \frac{2 \cdot x + 4}{x} = -\frac{x^2 + a}{x^2}$$

$$f''(x, a) := \frac{d}{dx} f'(x, a) = \frac{2 \cdot (x^2 + a)}{x^3} - \frac{2}{x} = \frac{2 \cdot a}{x^3}$$

#### Teilaufgabe b)

$$f(x, a) := \frac{-x^2 - 4x + a}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{x^2 + 4 \cdot x - a}{x^2} - \frac{2 \cdot x + 4}{x} = -\frac{x^2 + a}{x^2}$$

$$f''(x, a) := \frac{d}{dx} f'(x, a) = \frac{2 \cdot (x^2 + a)}{x^3} - \frac{2}{x}$$

## Teilaufgabe c)

$$f(x, a) := \frac{-x^2 - 4x + a}{(x+1)^2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{2 \cdot (x^2 + 4 \cdot x - a)}{(x+1)^3} - \frac{2 \cdot x + 4}{(x+1)^2} = -\frac{2 \cdot (a - x + 2)}{(x+1)^3}$$

$$f''(x, a) := \frac{d}{dx} f'(x, a) = \frac{3 \cdot (2 \cdot a - 2 \cdot x + 4)}{(x+1)^4} + \frac{2}{(x+1)^3} = \frac{2 \cdot (3 \cdot a - 2 \cdot x + 7)}{(x+1)^4}$$

## Teilaufgabe d)

$$f(x, a) := \frac{x^2 - ax + a}{x^2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = -\frac{a - 2 \cdot x}{x^2} - \frac{2 \cdot (x^2 - a \cdot x + a)}{x^3} = \frac{a \cdot (x - 2)}{x^3}$$

$$f''(x, a) := \frac{d}{dx} f'(x, a) = \frac{a}{x^3} - \frac{3 \cdot a \cdot (x - 2)}{x^4} = -\frac{2 \cdot a \cdot (x - 3)}{x^4}$$

Teilaufgabe e)

$$f(x, a) := \frac{3 \cdot x + 9}{x^2 + 6 \cdot x + a}$$

$$x^2 + 6 \cdot x + a = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{9 - a - 3} \\ -\sqrt{9 - a - 3} \end{pmatrix}$$

$$a < 9 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{ -\sqrt{9 - a - 3}; \sqrt{9 - a - 3} \}$$

$$a = 9 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{ -3 \}$$

$$a > 9 \quad D = \mathbb{R}$$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{3}{x^2 + 6 \cdot x + a} - \frac{(2 \cdot x + 6) \cdot (3 \cdot x + 9)}{(x^2 + 6 \cdot x + a)^2} = \frac{3 \cdot (a - 6 \cdot x - x^2 - 18)}{(a + 6 \cdot x + x^2)^2}$$

$$f''(x, a) := \frac{d}{dx} f'(x, a) = \frac{2 \cdot (2 \cdot x + 6) \cdot (3 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 3 \cdot a + 54)}{(x^2 + 6 \cdot x + a)^3} - \frac{6 \cdot x + 18}{(x^2 + 6 \cdot x + a)^2}$$

$$f''(x, a) = -\frac{6 \cdot (x + 3) \cdot (3 \cdot a - 6 \cdot x - x^2 - 36)}{(a + 6 \cdot x + x^2)^3}$$

$$f''(x, a) := \frac{54 \cdot x - 9 \cdot a + 9 \cdot x^2 + x^3 - 3 \cdot a \cdot x + 108}{(a + 6 \cdot x + x^2)^3}$$

Teilaufgabe f)

$$f(x, a) := \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{a}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = x - \frac{a}{x^2} = -\frac{a - x^3}{x^2}$$

$$f''(x, a) := \frac{d}{dx} f'(x, a) = \frac{2 \cdot (a - x^3)}{x^3} + 3 = \frac{x^3 + 2 \cdot a}{x^3}$$

Teilaufgabe g)

$$f(x, a) := \frac{x^2 - 4}{\frac{-1}{4} \cdot x^2 + a} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{-1}{4} \cdot x^2 + a = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{a} \\ -2 \cdot \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

$$a > 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2 \cdot \sqrt{a}; 2 \cdot \sqrt{a}\}$$

$$a = 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$a < 0 \quad D = \mathbb{R}$$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{2 \cdot x}{a - \frac{x^2}{4}} + \frac{x \cdot (x^2 - 4)}{2 \cdot \left(a - \frac{x^2}{4}\right)^2} = \frac{32 \cdot x \cdot (a - 1)}{(4 \cdot a - x^2)^2}$$

$$f''(x, a) := \frac{d}{dx} f'(x, a) = \frac{32 \cdot (a - 1)}{(4 \cdot a - x^2)^2} + \frac{128 \cdot x^2 \cdot (a - 1)}{(4 \cdot a - x^2)^3} = \frac{32 \cdot (a - 1) \cdot (3 \cdot x^2 + 4 \cdot a)}{(4 \cdot a - x^2)^3}$$

Teilaufgabe h)

$$f(x) := \frac{4 - (2 \cdot x + 1)^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot x - 1\right)^2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = \frac{(2 \cdot x + 1)^2 - 4}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^3} - \frac{8 \cdot x + 4}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2} = \frac{8 \cdot (10 \cdot x + 1)}{(x - 2)^3}$$

$$f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{80}{(x - 2)^3} - \frac{3 \cdot (80 \cdot x + 8)}{(x - 2)^4} = -\frac{8 \cdot (20 \cdot x + 23)}{(x - 2)^4}$$

## Teilaufgabe i)

$$f(x, a) := \frac{x^2 - a \cdot x + 1}{(x - a)^2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{ a \}$$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{2 \cdot (x^2 - a \cdot x + 1)}{(a - x)^3} - \frac{a - 2 \cdot x}{(a - x)^2} = -\frac{a^2 - x \cdot a - 2}{(a - x)^3}$$

$$f''(x, a) := \frac{d}{dx} f'(x, a) = \frac{3 \cdot (x \cdot a - a^2 + 2)}{(a - x)^4} + \frac{a}{(a - x)^3} = -\frac{2 \cdot (a^2 - x \cdot a - 3)}{(a - x)^4}$$

## Teilaufgabe j)

$$f(x, a) := \frac{x^2 + 2 \cdot a \cdot x + 1}{2 \cdot x + 4 \cdot a} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{ -2 \cdot a \}$$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{2 \cdot a + 2 \cdot x}{4 \cdot a + 2 \cdot x} - \frac{2 \cdot (x^2 + 2 \cdot a \cdot x + 1)}{(4 \cdot a + 2 \cdot x)^2} = \frac{(2 \cdot a + x - 1) \cdot (2 \cdot a + x + 1)}{2 \cdot (2 \cdot a + x)^2}$$

$$f'(x, a) := \frac{4 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot x + x^2 - 1}{2 \cdot (2 \cdot a + x)^2}$$

$$f''(x, a) := \frac{d}{dx} f'(x, a) = \frac{4 \cdot a + 2 \cdot x}{2 \cdot (2 \cdot a + x)^2} - \frac{4 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot x + x^2 - 1}{(2 \cdot a + x)^3} = \frac{1}{(2 \cdot a + x)^3}$$