Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 1985

- **Mathematik 12 Technik - A I - Lösung**

Aufgabe

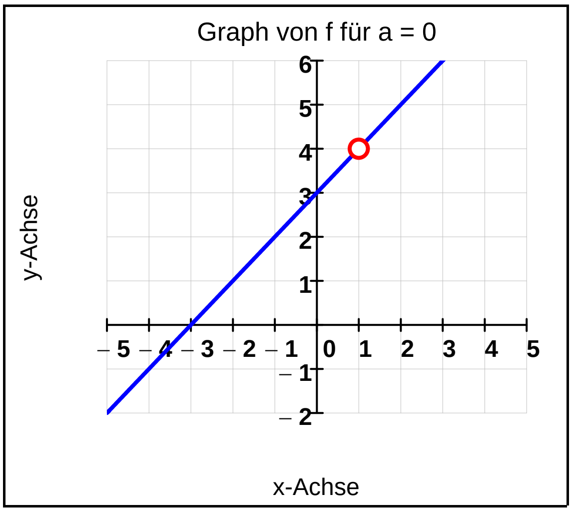
Gegeben sind die reellen Funktion $f_a(x) = x + 3 + \frac{a^2}{x-1}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der von a unabhängigen maximalen Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion f_a in einem kartesischen Koordinatensystem ist die Kurve G_a.

Teilaufgabe 1.1 (1 BE)
Geben Sie die Definitionsmenge D der Funktion f_a an.

$D = \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$

Teilaufgabe 1.2 (2 BE)
Zeichnen Sie für den Sonderfall $a = 0$ den Graphen G_0 der Funktion f_0.
Maßstab: 1 LE entspricht 1 cm

$f_0(x) := x + 3$



Teilaufgabe 2.0
Der Fall $a = 0$ wird nun ausgeschlossen. Damit ist jetzt $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe 2.1 (9 BE)
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.
Für welche Werte von a hat die Funktion f_a zwei Nullstellen, eine bzw. keine Nullstelle?

Funktionsterm: $f(x,a) := x + 3 + \frac{a^2}{x-1}$ $\qquad f(x,a) = \frac{a^2 + x^2 + 2 \cdot x - 3}{x-1}$

Nullstellenbedingung:

$$x0(a) := a^2 + x^2 + 2\cdot x - 3 = 0 \;\left|\; \begin{array}{l}\text{auflösen}, x \\ \text{erweitern}\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{4-a^2}-1 \\ -\sqrt{4-a^2}-1 \end{pmatrix}$$

Diskriminante: $D(a) := 4 - a^2$

2 Nullstellen: $D(a) > 0 \rightarrow 4 - a^2 > 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow -2 < a < 2$

$$x_1(a) = -\sqrt{4-a^2} - 1 \qquad x_2(a) = \sqrt{4-a^2} - 1$$

1 Nullstelle: $D(a) = 0 \rightarrow 4 - a^2 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$a = 2 \qquad x_1(2) = -1$

$a = -2 \qquad x_1(-2) = -1$

keine Nullstelle: $D(a) < 0 \rightarrow 4 - a^2 < 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow 2 < a \vee a < -2$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_a an.
Begründen Sie, warum alle Graphen G_a mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dieselben Asymptoten haben.

Senkrechte Aymptote: $x = 1$ unabhängig von a.

Schiefe Asymptote: $g(x) := x + 3$ unabhängig von a.

Teilaufgabe 2.3 (7 BE) (nicht mehr im aktuellen Lehrplan)
Berechnen Sie die Koordinaten des Asymptotenschnittpunkts, und zeigen Sie, dass alle Graphen G_a zum Punkt S(1/4) symmetrisch sind.

$g(1) = 4$ Schnittpunkt: S(1/4)

Koordinatentransformation: $x = u + 1 \qquad y = v + 4$

$$f(u+1, a) \rightarrow u + \frac{a^2}{u} + 4 \qquad f_{neu}(u, a) := f(u+1, a) - 4 = \frac{a^2 + u^2}{u}$$

Symmetriebeweis: $f_{neu}(-u, a) \rightarrow -\dfrac{a^2+u^2}{u} \qquad -f_{neu}(u, a) \rightarrow -\dfrac{a^2+u^2}{u}$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrie

Teilaufgabe 3.0
Für diese Teilaufgabe wird $a > 0$ vorausgesetzt.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion f_a.

1. Ableitung: $\mathbf{f'(x,a) := \frac{d}{dx} f(x,a) = 1 - \frac{a^2}{(x-1)^2}}$

2. Ableitung: $\mathbf{f''(x,a) := \frac{d}{dx} f'(x,a) = \frac{2 \cdot a^2}{(x-1)^3}}$

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)
Bestimmen Sie die Intervalle, in denen der Graph G_a streng monoton steigt bzw. fällt.

Waagrechte Tangenten: $\mathbf{f'(x,a) = 0 \rightarrow 1 - \frac{a^2}{(x-1)^2} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} a+1 \\ 1-a \end{pmatrix}}$

		$x = 1 - a$		$x \neq 1$		$x = 1 + a$	
Zähler	pos		neg		neg		pos
Nenner	pos		pos		pos		pos
f '(x)	pos		neg		neg		pos
G_f	sms		smf		smf		sms
		HP		Pol		TP	

G_f ist streng monoton steigend für $x \in\ ]-\infty; 1 - a]$,
G_f ist streng monoton fallend für $x \in [1 - a; 1[$,
G_f ist streng monoton fallend für $x \in\ ]1; 1 + a]$,
G_f ist streng monoton steigend für $x \in [1 + a; \infty[$.

Teilaufgabe 3.3 (4 BE)
Berechnen Sie die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt des Graphen G_a

$\mathbf{f(1-a,a) = 4 - 2 \cdot a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{HP(1 - a \,/\, 4 - 2 \cdot a)}$

$\mathbf{f(1+a,a) = 2 \cdot a + 4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{TP(1 + a \,/\, 4 + 2 \cdot a)}$

Teilaufgabe 3.4 (4 BE)
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_a.

2. Ableitung: $$f''(x,a) = \frac{2 \cdot a^2}{(x-1)^3}$$

Zähler immer positiv, Nenner ändert das Vorzeichen an der Stelle x = 1

$f''(x,a) > 0$ für $x > 1$

$f''(x,a) < 0$ für $x < 1$

G_f ist rechtsgekrümmt für $x \in \,]-\infty\,;\,1[$, G_f ist linksgekrümmt für $x \in \,]1\,;\,\infty[$.

Teilaufgabe 4.0
Für $a = \sqrt{3}$ erhält man die Funktion $f_{\sqrt{3}}$ mit $f_{\sqrt{3}}(x) = x + 3 + \frac{3}{x-1}$.

Teilaufgabe 4.1 (4 BE)
Geben Sie für den Graphen $G_{\sqrt{3}}$ der Funktion $f_{\sqrt{3}}$ unter Verwendung bereits vorhandener Ergebnisse die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse sowie die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt an.

$f_{\sqrt{3}}(x) = f(x)$ $\qquad f(x) := x + 3 + \frac{3}{x-1}$

Nullstellen: $f(x) = 0 \rightarrow x + \frac{3}{x-1} + 3 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1\,(0\,/\,0)$, $S_2\,(-2\,/\,0)$

Hochpunkt: $HP(\,1-\sqrt{3}\,/\;\,4-2\cdot\sqrt{3}\,)$

Tiefpunkt: $TP(\,1+\sqrt{3}\,/\;\,4+2\cdot\sqrt{3}\,)$

Teilaufgabe 4.2 (3 BE)
Nennen Sie die Wertemenge W der Funktion $f_{\sqrt{3}}$, und begründen Sie Ihre Antwort.

Wertemenge: $W = \,]-\infty\,;\,4-2\cdot\sqrt{3}\,] \cup [\,4+2\cdot\sqrt{3}\,;\,\infty[$

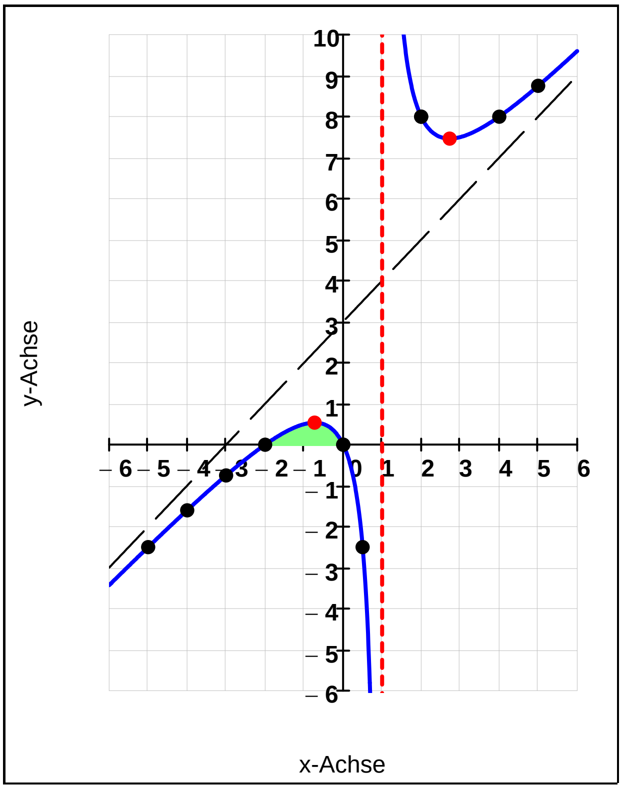
Verhalten an der Polstelle und Verhalten an der schiefen Asymptote.

Teilaufgabe 4.3 **(9 BE)**

Zeichnen Sie den Graphen $G_{\sqrt{3}}$ für $|x| \le 5$ und $x \in D$.

Fertigen Sie dazu eine Wertetabelle an mit der Schrittweite $\Delta x = 1$, und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte an den Stellen $x = 0.5$ und $x = 1.5$.

Tragen Sie die Asymptoten sowie die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen $G_{\sqrt{3}}$ in die Zeichnung ein.



Teilaufgabe 4.4 **(6 BE)**

Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das der Graph $G_{\sqrt{3}}$ mit der x-Achse einschließt.

Stammfunktion:

$$F(x) := \int x + 3 + \frac{3}{x-1}\,dx \text{ ersetzen}, \ln(x-1) = \ln(|x-1|) \rightarrow 3\cdot x + 3\cdot\ln(|x-1|) + \frac{x^2}{2}$$

$$A := F(0) - F(-2) \qquad A = 4 - 3\cdot\ln(3)$$

Teilaufgabe 4.5 (4 BE)

Die Integralfunktion J mit $J(x) = \int_3^x f\left(\sqrt{3}\right) dt$ sei im Bereich $A = \{ x \mid x \geq 3 \}$ definiert.

Weisen Sie ohne Berechnung des Integrals nach, dass die Funktion J im Bereich A genau eine Nullstelle besitzt und geben Sie diese an.

$J(3) = 0 \quad \Rightarrow$ Nullstelle: $x_0 = 3$

$J'(x) = f(x) > 0$ $\quad G_J$ ist in $x \geq 3$ streng monoton steigend.

$\Rightarrow \quad x_0 = 3$ ist einzige Nullstelle