Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 1994

- **Mathematik 12 Technik - A II - Lösung**

made with mathcad

Aufgabe

Gegeben sind die reellen Funktion $f_a(x) = 8\cdot\frac{x-3}{x^2-6\cdot x+a}$ mit $a \in IR$ in ihrer jeweils größtmöglichen Definitionsmenge $D_a \subseteq IR$. Der Graph einer solchen Funktion f_a in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_a bezeichnet.

Teilaufgabe 1.0
In dieser Teilaufgabe kann a eine beliebige reelle Zahl sein.

Teilaufgabe 1.1 (8 BE)
Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_a der Funktion f_a in Abhängigkeit von a, und ermitteln Sie die Art etwaiger Definitionslücken von f_a.

Funktionsterm: $f(x,a) := 8\cdot\frac{x-3}{x^2-6\cdot x+a}$

Nenner: $n(x,a) := \mathrm{denom}(f(x,a)) = x^2 - 6\cdot x + a$

Nullstellenbedingung: $n(x,a) = 0 \rightarrow x^2 - 6\cdot x + a = 0$ auflösen, x $\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{9-a}+3 \\ 3-\sqrt{9-a} \end{pmatrix}$

$9 - a > 0$ auflösen, a $\rightarrow a < 9$ $\quad$ $D = IR \setminus \{\ 3-\sqrt{9-a}\ ;\ 3+\sqrt{9-a}\ \}$

Polstellen 1. Ordnung $\quad$ $x_1 = 3 - \sqrt{9-a}$ $\quad$ $x_2 = 3 + \sqrt{9-a}$

$9 - a = 0$ auflösen, a $\rightarrow 9$ $\quad$ $D = IR \setminus \{\ 3\ \}$

Polstelle 1. Ordnung $\quad$ $a = 9$ $\quad$ $x = 3$

$9 - a < 0$ auflösen, a $\rightarrow 9 < a$ $\quad$ $D = IR$

$n(3,a) = 0 \rightarrow a - 9 = 0$ auflösen, a $\rightarrow 9$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Ermitteln Sie, für welche Werte des Parameters a der zugehörige Graph G_a die x-Achse bzw. die y-Achse schneidet.
Geben Sie für diese Werte von a die Koordinaten der Schnittpunkte an.

a = 9 Stetige Fortsetzung: $f(x,9) = \frac{8\cdot x - 24}{x^2 - 6\cdot x + 9} = \frac{8}{x-3}$ keine Nullstellen

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0,9) \rightarrow -\frac{8}{3}$ $S_y(0/\ -\frac{8}{3})$

a ≠ 9 Zähler: $z(x,a) := \mathrm{numer}(f(x,a)) = 8\cdot x - 24$

Nullstellenbedingung: $x_0 := z(x,a) = 0 \rightarrow 8\cdot x - 24 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 3$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x(3/\ 0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0,9) \rightarrow -\frac{8}{3}$ $S_y(0/\ -\frac{8}{3})$

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Weisen Sie nach, dass alle Graphen G_a punktsymmetrisch sind zum Punkt W(3/0).

Koordinatentransformation: $x = u + 3$ $y = v$

$$f_{neu}(u,a) := f(u+3,a) = \frac{8\cdot u}{u^2 + a - 9}$$

$$f_{neu}(-u,a) \rightarrow -\frac{8\cdot u}{u^2 + a - 9} \qquad -f_{neu}(u,a) \rightarrow -\frac{8\cdot u}{u^2 + a - 9}$$

$\Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch bzgl. W(3/0)

Teilaufgabe 1.4 (2 BE)
Berechnen Sie die 1. Ableitung der Funktion f_a.

[Ergebnis: $f'_a(x) = 8\cdot\frac{-x^2 + 6\cdot x + a - 18}{\left(x^2 - 6\cdot x + a\right)^2}$]

$$f'(x,a) := \frac{d}{dx}f(x,a) = \frac{8\cdot\left(6\cdot x - x^2 + a - 18\right)}{\left(x^2 - 6\cdot x + a\right)^2}$$

Teilaufgabe 1.5 (5 BE)
Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Tangente an den zugehörigen Graphen G_a im Punkt W(3/0) den Steigungsfaktor $\mathbf{m = 8}$ besitzt.

Steigung der Tangente: $$f'(3,a) = \frac{8\cdot a - 72}{(a-9)^2} = \frac{8}{a-9}$$

Bedingung: $$f'(3,a) = 8 \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{8}{a-9} = 8 \text{ auflösen}, a \rightarrow 10$$

Teilaufgabe 2.0
Setzen Sie für alle weiteren Teilaufgaben $\mathbf{a = 10}$

Teilaufgabe 2.1 (2 BE)
Ermitteln Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen G_{10}.

$$f(x) := f(x,10) = \frac{8\cdot x - 24}{x^2 - 6\cdot x + 10} \qquad D = IR$$

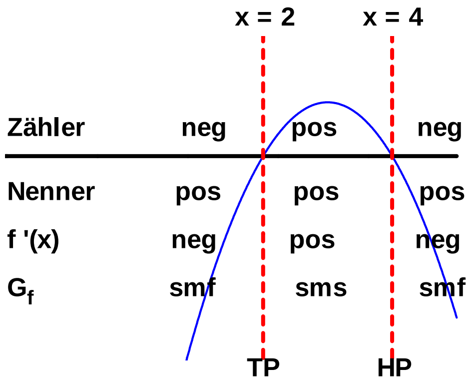
Horizontale Asymptote $\mathbf{y = 0}$, da Zählergrad < Nennergrad

Teilaufgabe 2.2 (8 BE)
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f_{10}, und bestimmen Sie daraus Koordinaten und Art der Extremalpunkte des Graphen G_{10}.

$$f'(x) := f'(x,10) = -\frac{8\cdot x^2 - 48\cdot x + 64}{\left(x^2 - 6\cdot x + 10\right)^2}$$

$$z'(x) := \text{numer}(f'(x)) \rightarrow 48\cdot x - 8\cdot x^2 - 64$$

Horizontale Tangenten: $$z'(x) = 0 \rightarrow 48\cdot x - 8\cdot x^2 - 64 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



G_f ist streng monoton fallend in $]\ -\infty\ ;\ 2\ ]$,

G_f ist streng monoton steigend in $[\ 2\ ;\ 4\ ]$,

G_f ist streng monoton fallend in $[\ 4\ ;\ \infty\ [$.

$f(2) = -4$ Tiefpunkt: **TP(2 / −4)**

$f(4) = 4$ Hochpunkt: **TP(4 / 4)**

Teilaufgabe 2.3 **(2 BE)**
Begründen Sie ohne Berechnung der 2. Ableitung, dass der Punkt W(3/0) aus Teilaufgabe 1.3 ein Wendepunkt des Graphen G_{10} ist.

Das Extremum der 1. Ableitung ist Wendepunkt. Die 1. Ableitungsfunktion ist eine Parabel mit den Nullstellen 2 und 4, also liegt der Scheitel in der Mitte: $x_S = 3$, $y_S := f(3) = 0$

Teilaufgabe 2.4 **(4 BE)**
Der Graph G_{10} besitzt noch zwei weitere Wendepunkte $W_1\left(3+\sqrt{3}\ /\ y_1\right)$ und $W_1\left(x_2\ /\ y_2\right)$.

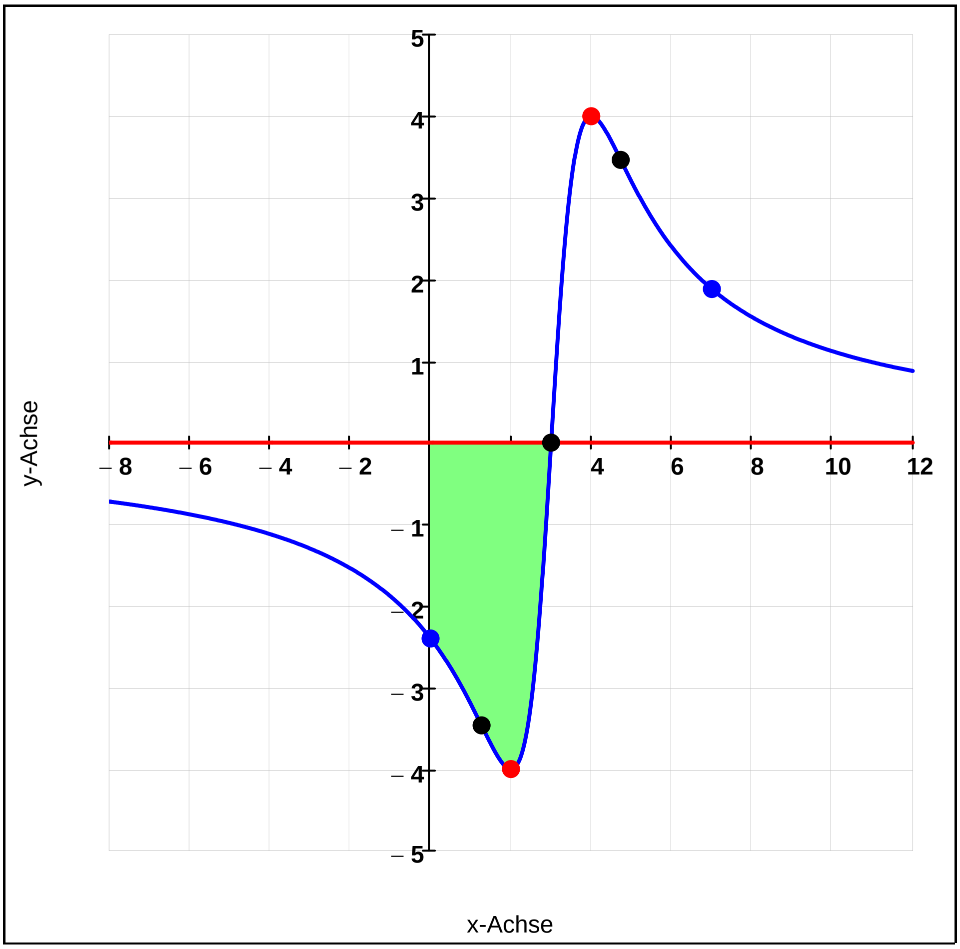
Zeigen Sie, dass gilt $y_1 = 2\cdot\sqrt{3}$, und bestimmen Sie x_2 und y_2 mithilfe bisheriger Ergebnisse.

$x_1 := 3 + \sqrt{3}$

$$y_1 := f\left(3+\sqrt{3}\right) = -\frac{8\cdot\sqrt{3}}{6\cdot\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}+3\right)^2 + 8} = 2\cdot\sqrt{3}$$

Punktsymmetrie: $x_2 := 3 - \sqrt{3}$ $y_2 := -y_1 = -2\cdot\sqrt{3}$

Teilaufgabe 2.5 (7 BE)
Zeichnen Sie den Graphen G_{10} im Bereich $-1 \le x \le 7$. Berechnen Sie dazu den Funktionswert $f_{10}(7)$, und berücksichtigen Sie für die Zeichnung die bereits vorliegenden Ergebnisse. Tragen Sie die Tangente im Wendepunkt W(3/0) gemäß Aufgabe 1.5 in die Zeichnung ein.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE entspricht 1 cm.



Teilaufgabe 2.6 (5 BE)
Der Graph G_{10} und die beiden Koordinatenachsen begrenzen im 4. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie die Flächenmaßzahl dieses Flächenstücks.

Stammfunktion: $$\int 8\cdot\frac{x-3}{x^2-6\cdot x+10}\,dx = \int 4\cdot\frac{2\cdot x-6}{x^2-6\cdot x+10}\,dx = 4\cdot\ln\left(\left|x^2-6\cdot x+10\right|\right)$$

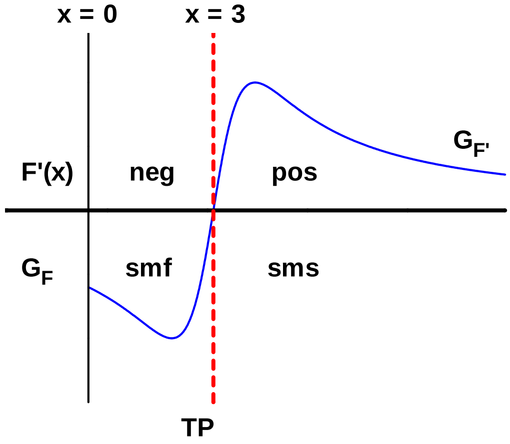
Fläche: $$A := -\int_0^3 8\cdot\frac{x-3}{x^2-6\cdot x+10}\,dx$$ $$A = \ln(10000) = 9.21$$

Teilaufgabe 3.0

Gegeben ist nun die Integralfunktion $\mathbf{F(x)} := \int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{f(t)\,dt}$ und dem Graphen G_F .

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion F, und geben Sie die Koordinaten des absoluten Tiefpunktes des Graphen G_F an.

$\mathbf{F'(x) = f(x)}$



G_F ist streng monoton fallend in $\mathbf{]\ 0 ; 3\ ]}$, G_F ist streng monoton steigend in $\mathbf{]\ 3 ; \infty\ [}$, d. h. relativer Tiefpunkt an der Stelle $\mathbf{x = 3}$.

Funktionswert:

$$\mathbf{F(3) = \int_0^3 f(t)\,dt = -A = -4 \cdot \ln(10) = -9.21}$$

Vergleich mit den Randwerten:

$$\mathbf{F(0) = \int_0^0 f_{10}(t)\,dt = 0} \qquad \lim_{x \to \infty} \mathbf{F(x)} \to \infty$$

Der Punkt $\mathbf{(3\ /\ -4 \cdot \ln(10)\ )}$ ist absoluter Tiefpunkt.

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_F.

$F''(x) = f'(x)$

G_F ist rechtsgekrümmt in $[\ 0\ ;\ 2\ ]$, G_F ist linksgekrümmt in $[\ 2\ ;\ 4\ ]$,
G_F ist rechtsgekrümmt in $[\ 4\ ;\ \infty\ [$.

Teilaufgabe 3.3 (5 BE)
Begründen Sie mithilfe bereits vorliegender Ergebnisse, dass die Funktion F genau zwei Nullstellen besitzt, und bestimmen Sie die Lage dieser Nullstellen.

$$F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{1. Nullstelle:} \qquad x_1 = 0$$

Wegen des Montonieverhaltens von F besitzt F höchstens eine weitere Nullstelle $x_2 > 3$.

$$F(6) = \int_0^6 f(t)\,dt = \int_0^3 f(t)\,dt + \int_3^6 f(t)\,dt = -A + A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{2. Nullstelle:} \qquad x_1 = 6$$