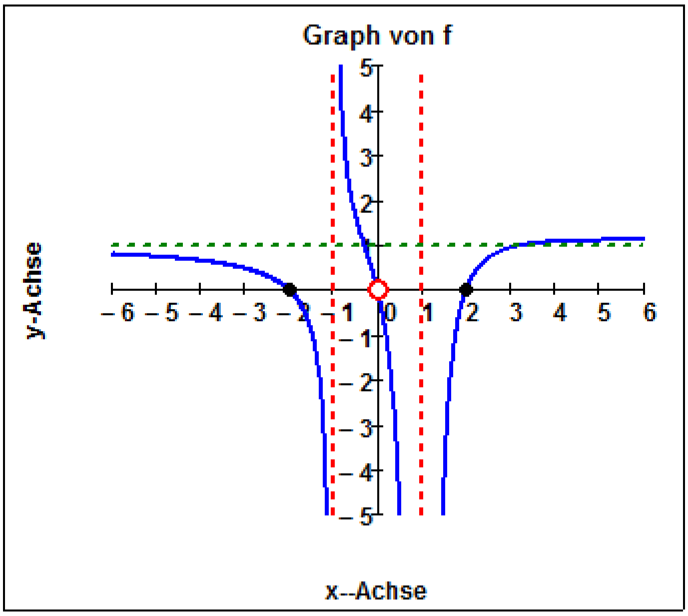
mathphys-online

GEBROCHENRATIONALE FUNKTIONEN



Inhaltsverzeichnis

Graphiken erstellt mit Mathcad 15

1 Gebrochenrationale Funktionen

1.1 Einführungsbeispiel

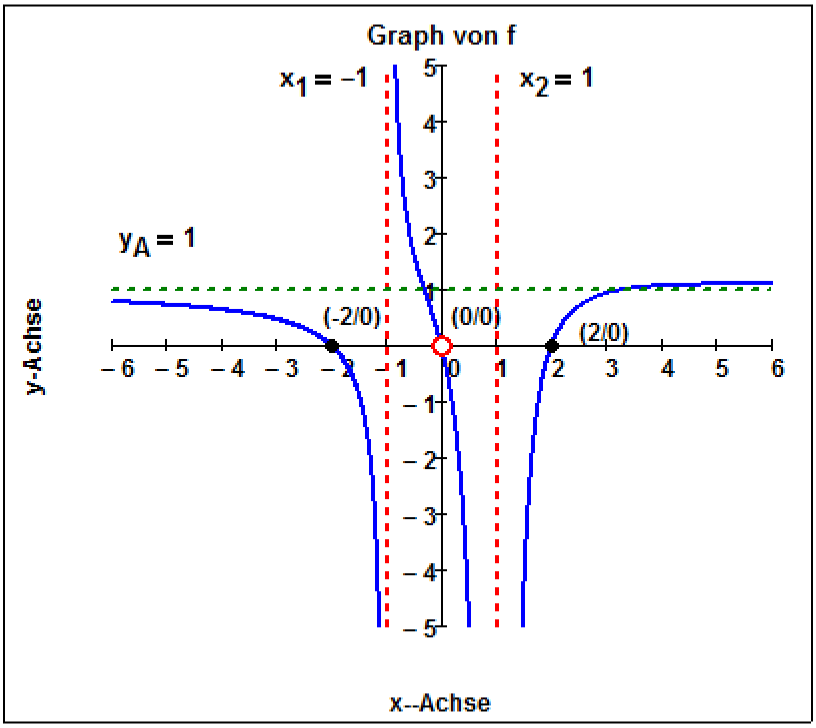
Definition
Eine Funktion

$$f: \ \mathrm{ID} \to \mathrm{IR} \qquad x \mapsto f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \wedge \quad v(x) \neq 0$$

heißt ***gebrochenrationale Funktion***,
wobei u(x) ein Polynom vom Grade m und v(x) ein Polynom vom Grade n ist.

Bezeichnung
$m \geq n$: ***unecht gebrochenrationale Funktion***
$m < n$: ***echt gebrochenrationale Funktion***

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^4 - x^3 - x^2 + x}$



Man stellt fest:
Da bei dieser Funktionsgleichung x im Nenner vorkommt, treten im Vergleich zu den bekannten ganzrationalen Funktionen völlig neue Eigenschaften auf.
Bei gebrochenrationalen Funktionen werden folgende Eigenschaften untersucht:
► Definitionsmenge und Verhalten an den Definitionslücken
► Nullstellen
► Asymptoten

Lösungsstrategie

► Faktorisieren des Zähler– und des Nennerpolynoms
► Festlegung des Definitionsbereichs und Kürzen, wenn möglich.
► Verhalten der Funktionswerte an den grenzen des Definitionsbereichs, also z. B. für $|x| \to \infty$ bzw. $x \to x_0^{+}$ und $x \to x_0^{-}$.

Wertetabelle für besondere Werte

Grenze im Unendlichen: $x \to -\infty$

x	-400	-300	-200
f(x)	0,9975	0,9966	0,9950

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to 1$

Grenze im Unendlichen: $x \to +\infty$

x	200	300	400
f(x)	1,0049	1,0033	1,0025

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \to 1$

Ergebnis: Die Gerade $y_0 = 1$ ist eine ***horizontale Asymptote***.

Linksseitige Annäherung an $x_1 = -1$:

x	-1,08	-1,06	-1,04	-1,02
f (x)	-8,8	-12	-18,2	-32

$\lim\limits_{x \to -1^{-}} f(x) \to -\infty$

Rechtsseitige Annäherung an $x_1 = -1$:

x	-0.98	-0,96	-0,94	-0,92
f(x)	38	19,2	13	9,8

$\lim\limits_{x \to -1^{+}} f(x) \to +\infty$

Ergebnis:
Die Funktionswerte wachsen über alle Grenzen. Man sagt:
Die Definitionslücke $x_1 = -1$ ist eine ***Polstelle 1.Ordnung*** (Unendlichkeitsstelle).
Sie ist eine ***vertikale Asymptote mit Vorzeichenwechsel***.

Linksseitige Annäherung an $x_2 = 1$:

x	0,92	0,94	0,96	0,98
f(x)	-236	-419	-942	-3761

$\lim\limits_{x \to +1^{-}} f(x) \to -\infty$

Rechtsseitige Annäherung an $x_2 = 1$:

x	1,02	1,04	1,06	1,08
f(x)	-3736	-930	-411	-230

$\lim\limits_{x \to +1^{+}} f(x) \to -\infty$

Ergebnis:
Die Funktionswerte wachsen über alle Grenzen. Man sagt:
Die Definitionslücke $x_2 = +1$ ist eine ***Polstelle 2.Ordnung*** (Unendlichkeitsstelle).
Sie ist eine ***vertikale Asymptote ohne Vorzeichenwechsel***.

Linksseitige Annäherung an $x_0 = 0$:

x	-0,008	-0,006	-0,004	-0,002
f(x)	0,032	0,024	0,016	0,008

$\lim\limits_{x \to +0^-} f(x) \to 0$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0 = 0$:

x	0,002	0,004	0,006	0,008
f(x)	-0,008	-0,016	-0,024	-0,032

$\lim\limits_{x \to +0^+} f(x) \to 0$

Ergebnis:
Die Funktionswerte nähern sich einem Grenzwert. Man sagt:
Die Definitionslücke $x_0 = 0$ ist eine ***stetig behebbare Definitionslücke***.

1.2 Steckbrief zum Einführungsbeispiel

Faktorisierter Funktionsterm:

$$f(x) = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 4)}{x \cdot (x^3 - x^2 - x + 1)} = \frac{x^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{x \cdot [x^2 \cdot (x-1) - (x-1)]} = \frac{x^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{x \cdot [(x-1) \cdot (x^2 - 1)]} = \frac{x^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{x \cdot [(x-1)^2 \cdot (x+1)]}$$

Definitionsmenge: $ID = IR \setminus \{-1 ; 0 ; 1\}$

Gekürzte Funktionsgleichung (stetige Fortsetzung): $f^*(x) = \dfrac{x \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{(x-1)^2 \cdot (x+1)}$

Nullstellen: $(-2/0)$ und $(2/0)$

Untersuchen des Verhaltens an den Grenzen des Definitionsbereichs

Annäherung von links: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 - h)$

Annäherung von rechts: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h)$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Verhalten an der Lücke $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h) = \lim_{x \to 0^-} \left[\frac{\overbrace{(-h)}^{\to 0^-} \cdot \overbrace{(-h+2) \cdot (-h-2)}^{\to -4}}{\underbrace{(-h-1)^2}_{\to 1} \cdot \underbrace{(-h+1)}_{\to 1}} \right] = \text{"} \frac{0^+}{1} \text{"} \to 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h) = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\overbrace{(h)}^{\to 0^+} \cdot \overbrace{(h+2) \cdot (h-2)}^{\to -4}}{\underbrace{(h-1)^2}_{\to 1} \cdot \underbrace{(h+1)}_{\to 1}} \right] = \text{"} \frac{0^-}{1} \text{"} \to 0^-$$

Funktionswert: $f^*(0) = 0$
$\Rightarrow$ Stetig behebbare Definitionslücke (0/0).

Verhalten an der Lücke $x_1 = -1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-1-h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\overbrace{(-1-h)}^{\to(-1)}\cdot\overbrace{(-1-h+2)}^{\to 1}\cdot\overbrace{(-1-h-2)}^{\to(-3)}}{\underbrace{(-1-h-1)^2}_{\to 4}\cdot\underbrace{(-1-h+1)}_{\to 0^-}}\right] \Rightarrow \text{"}\frac{3}{0^-}\text{"} \to -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-1+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\overbrace{(-1+h)}^{\to(-1)}\cdot\overbrace{(-1+h+2)}^{\to 1}\cdot\overbrace{(-1+h-2)}^{\to(-3)}}{\underbrace{(-1+h-1)^2}_{\to 4}\cdot\underbrace{(-1+h+1)}_{\to 0^+}}\right] \Rightarrow \text{"}\frac{3}{0^+}\text{"} \to +\infty$$

$\Rightarrow$ $x_{.1} = -1$ ist Polstelle 1. Ordnung, also senkrechte Asymptote mit VZW.

Verhalten an der Lücke $x_2 = +1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\overbrace{(1-h)}^{\to 1}\cdot\overbrace{(1-h+2)}^{\to 3}\cdot\overbrace{(1-h-2)}^{\to(-1)}}{\underbrace{(1-h-1)^2}_{\to 0^+}\cdot\underbrace{(1-h+1)}_{\to 2}}\right] \Rightarrow \text{"}\frac{-3}{0^+}\text{"} \to -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\overbrace{(1+h)}^{\to 1}\cdot\overbrace{(1+h+2)}^{\to 3}\cdot\overbrace{(1+h-2)}^{\to(-1)}}{\underbrace{(1+h-1)^2}_{\to 0^+}\cdot\underbrace{(1+h+1)}_{\to 2}}\right] \Rightarrow \text{"}\frac{-3}{0^+}\text{"} \to -\infty$$

$\Rightarrow$ $x_2 = 1$ ist Polstelle 2. Ordnung, also senkrechte Asymptote ohne VZW.

<u>Verhalten im Unendlichen:</u>

Zählergrad = Nennergrad, also Ausklammern der höchsten Potenz von x:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^4\cdot\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^4\cdot\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\left(1-\overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}\right)} \to 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^4\cdot\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^4\cdot\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1-\overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}\right)} \to 1$$

$\Rightarrow$ $y_A = 1$ ist waagrechte Asymptote.

1.3 Allgemeine Definitionen

1.3.1 Definitionslücken und Verhalten an den Definitionslücken

Definition

Die ***Definitionslücken*** einer gebrochen-rationalen Funktion

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \wedge x \in ID_f = \left\{ x \,\middle|\, v(x) \neq 0 \right\}$ sind die **Nullstellen des Nennerpolynoms** v(x).

Folgerung

Ist x_0 eine Nullstelle des Nennerpolynoms, so hat die Funktion eine Definitionslücke an der Stelle $x = x_0$. In diesem Fall enthält das Nennerpolynom im Nenner den Faktor $\left(x - x_0\right)$.

Bezeichnung

Eine Stelle x_0 hat die **Vielfachheit n,** wenn der Term $(x - x_0)$ n-mal vorkommt, d.h. es steht $(x - x_0)^n$ im Zähler oder im Nenner.

Nun kann man zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall

Der Faktor $\left(x - x_0\right)$ im Nenner lässt sich **nicht** durch Kürzen beseitigen.

Oder:
Die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners ist größer als die Vielfachheit der Nullstelle des Zählers. $\Rightarrow$ Der Funktionswert wächst bei Annäherung an die Definitionslücke unbeschränkt (geht gegen $\pm\infty$).

Definition

Eine gekürzte gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \;\wedge\; x \in ID_f$ hat einen

Pol n-ter Ordnung (Unendlichkeitsstelle, vertikale Asymptote) **an der Stelle x_0**, wenn x_0 **n-fache Nullstelle des Nennerpolynoms v(x)** und nicht zugleich Nullstelle des Zählerpolynoms u(x) ist.

2. Fall
Der Faktor $\left(x - x_0\right)$ im Nenner lässt sich durch Kürzen beseitigen.

Oder:
Die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners ist kleiner oder gleich als die Vielfachheit der Nullstelle des Zählers. $\Rightarrow$ Der Funktionswert ist bei Annäherung an die Definitionslücke beschränkt.

Definition

Eine Stelle x_0, an der Zähler u(x) **und** Nenner v(x) einer gebrochenrationalen Funktion eine Nullstelle x_0 besitzen, wobei die **Vielfachheit der NS des Nenners v(x)** $\leq$ der **Vielfachheit der NS des Zählers u(x)** ist, heißt ***stetig behebbare Definitionslücke***.

Bezeichnung: Der gekürzte Funktionsterm f_{gek} ist die so genannte ***stetige Fortsetzung*** von f.

1.3.2 Verhalten im Unendlichen

Bezeichnung:

Eine **Asymptote** ist eine Gerade, die sich einer ins Unendliche verlaufenden Kurve angenähert, ohne sie jedoch zu erreichen. Der Abstand zwischen Kurve und Gerade wird dabei beliebig klein.

Bei gebrochenrationalen Funktionen es beim Verhalten im Unendlichen zwei Möglichkeiten:

- Die Funktionswerte sind beschränkt, dann besitzen Sie eine waagrechte Asymptote.
- Die Funktionswerte sind nicht beschränkt, dann besitzen Sie entweder eine schiefe Asymptote oder eine asymptotische Kurve.

Es ist abhängig vom Grad m des Zählerpolynoms u(x) und Grad n des Nennerpolynoms v(x):

Falls Zählergrad < Nennergrad, gilt: $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) \to 0$.

Die ***horizontale Asymptote*** ist die x-Achse.
Vorgehensweise: Ausklammern der höchsten Potenz von x und Grenzübergang.

Falls Zählergrad = Nennergrad, gilt: $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) \to c \;\wedge\; c \neq 0$.

Die ***horizontale Asymptote*** ist eine Parallele zur x-Achse.
Vorgehensweise: Ausklammern der höchsten Potenz von x oder Polynomdivision mit Rest und dann Grenzübergang.

Falls Zählergrad > Nennergrad, gilt: $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) \to \pm\infty$.

Vorgehensweise: Polynomdivision mit Rest und dann Grenzübergang.

Zählergrad = Nennergrad +1: $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to \infty} \left(a\,x + b + \underbrace{R(x)}_{\to 0} \right) \quad \wedge \quad a \neq 0$

Es gibt eine ***schiefe Asymptote*** $k(x) = a\,x + b$
Vorgehensweise: Polynomdivision mit Rest und dann Grenzübergang.

Zählergrad > Nennergrad +1: $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \underbrace{R(x)}_{\to 0} \right) \quad \wedge \quad a_{m-n} \neq 0$

Es gibt eine ***asymptotische Kurve*** $k(x) = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i \quad \wedge \quad a_{m-n} \neq 0$

Vorgehensweise: Polynomdivision mit Rest und dann Grenzübergang.

1.3.3 Nullstellen

Definition

Die **Nullstellen** einer gekürzten gebrochenrationalen Funktion $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \wedge x \in ID_f$ sind diejenigen **Nullstellen des Zählerpolynoms u(x), die nicht zugleich Nullstellen des Nennerpolynoms v(x)** sind.

1.4 Beispiele zum Verhalten in der Umgebung der Definitionslücke

1.4.1 Polstelle mit ungerader Ordnung, senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel

Beispiel 1

$$f(x)=\frac{1}{x-1} \qquad D=IR\setminus\{1\}$$

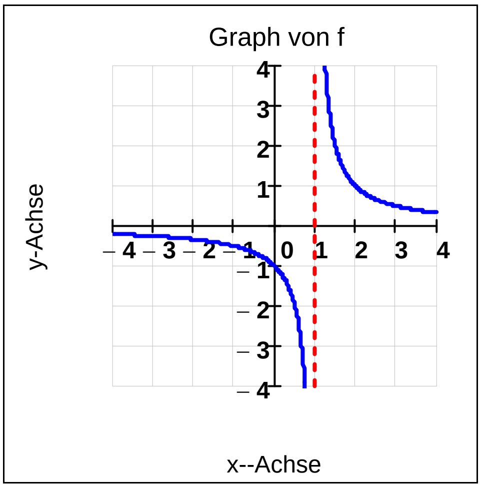
Linksseitige Annäherung an $x_0=1$:

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{h\to0} f(1-h)=\lim_{h\to0}\frac{1}{1-h-1}=\lim_{h\to0}\frac{1}{-h}\to-\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0=1$:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{h\to0} f(1+h)=\lim_{h\to0}\frac{1}{1+h-1}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\to+\infty$$

Die Funktionswerte wachsen mit ungleichem Vorzeichen unbeschränkt.



Beispiel 2

$$f(x)=\frac{-1}{x-1} \qquad D=IR\setminus\{1\}$$

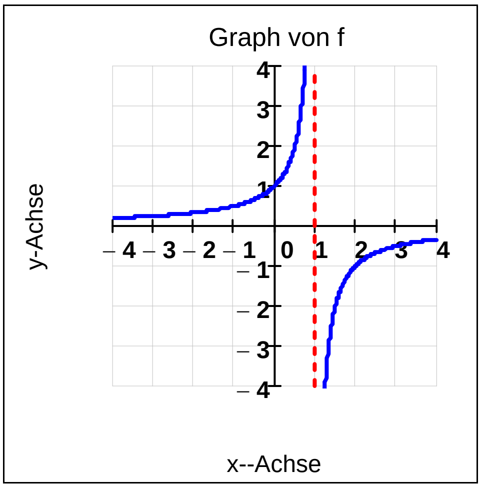
Linksseitige Annäherung an $x_0=1$:

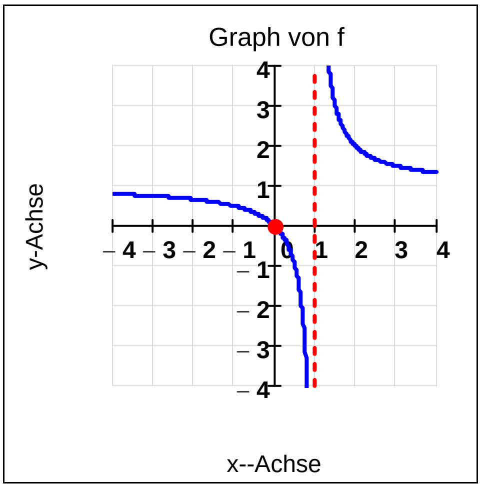
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{h\to0} f(1-h)=\lim_{h\to0}\frac{-1}{1-h-1}=\lim_{h\to0}\frac{-1}{-h}\to+\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0=1$:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{h\to0} f(1+h)=\lim_{h\to0}\frac{-1}{1+h-1}=\lim_{h\to0}\frac{-1}{h}\to-\infty$$

Die Funktionswerte wachsen mit ungleichem Vorzeichen unbeschränkt.





Beispiel 3

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-2x+1} \qquad D=\mathrm{IR}\setminus\{1\}$$

Gekürzter Funktionsterm: $f_{gek}(x)=\frac{x\cdot(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x}{x-1}$

Linksseitige Annäherung an $x_0=1$:

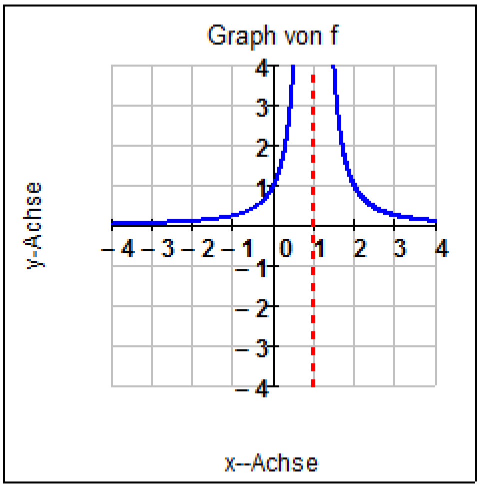
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(1-h)=\lim_{h\to 0}\frac{1-h}{1-h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{1-h}{-h}\to-\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(1+h)=\lim_{h\to 0}\frac{1+h}{1+h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h}{h}\to+\infty$$

Senkrechte Asymptote $x_0=1$; Nullstelle: $x_1=0$ einfach

1.4.2 Polstelle mit gerader Ordnung, senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel



Beispiel 4

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2} \qquad D=\mathrm{IR}\setminus\{1\}$$

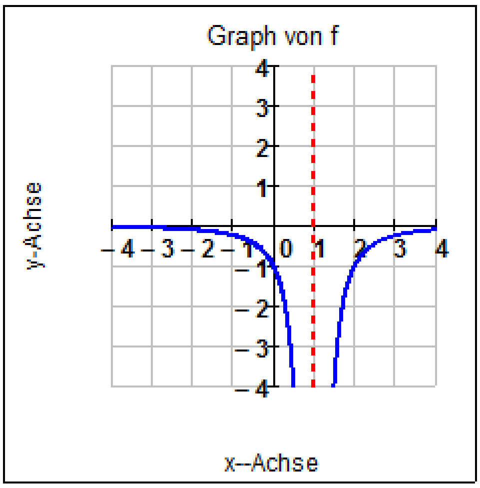
Linksseitige Annäherung an $x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(1-h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(1-h-1)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(-h)^2}\to+\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(1+h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(1+h-1)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(h)^2}\to+\infty$$

Die Funktionswerte wachsen mit gleichem Vorzeichen unbeschränkt.



Beispiel 5

$$f(x)=\frac{-1}{(x-1)^2} \qquad D=\mathrm{IR}\setminus\{1\}$$

Linksseitige Annäherung an $x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(1-h)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(1-h-1)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(-h)^2}\to-\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(1+h)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(1+h-1)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(h)^2}\to-\infty$$

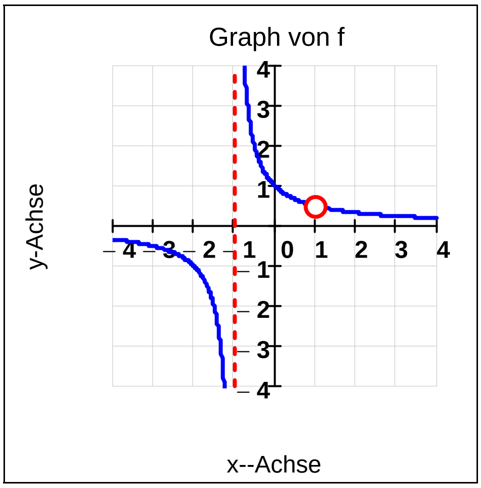
Die Funktionswerte wachsen mit gleichem Vorzeichen unbeschränkt.

1.4.3 Stetig behebbare Definitionslücke

Beispiel 6

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \qquad D = IR \setminus \{-1; 1\}$$

Stetige Fortsetzung: $f_{gek}(x) = \frac{x-1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{1}{x+1}$



Linksseitige Annäherung an $x_1 = -1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-1-h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{-1-h+1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{-h} \to -\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_1 = -1$:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-1+h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{-1+h+1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \to +\infty$$

Die Funktionswerte wachsen mit gleichem Vorzeichen unbeschränkt.

Linksseitige Annäherung an $x_2 = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1-h+1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2-h} \to \frac{1}{2}$

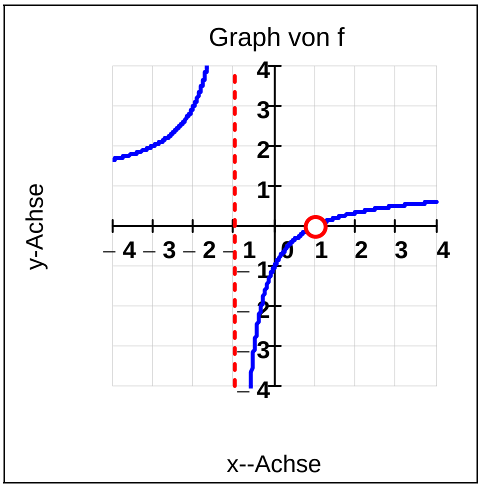
Rechtsseitige Annäherung an $x_2 = 1$: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+h+1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2+h} \to \frac{1}{2}$

Die Funktionswerte sind beschränkt und streben gegen einen Grenzwert $g = 0{,}5$.

Beispiel 7

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1} \qquad D = IR \setminus \{-1; 1\}$$

Stetige Fortsetzung: $f_{gek}(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{x-1}{x+1}$



Linksseitige Annäherung an $x_1 = -1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-1-h) = \lim_{h\to 0} \frac{(-1-h-1)^2}{-1-h+1}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2-h)^2}{-h} \to -\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_1 = -1$:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-1+h) = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h-1)^2}{-1+h+1} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2}{h} \to +\infty$$

Die Funktionswerte wachsen mit ungleichem Vorzeichen unbeschränkt.

Linksseitige Annäherung an $x_2 = 1$: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} \frac{(1-h-1)^2}{1-h+1} = "\frac{0}{2}" \to 0$

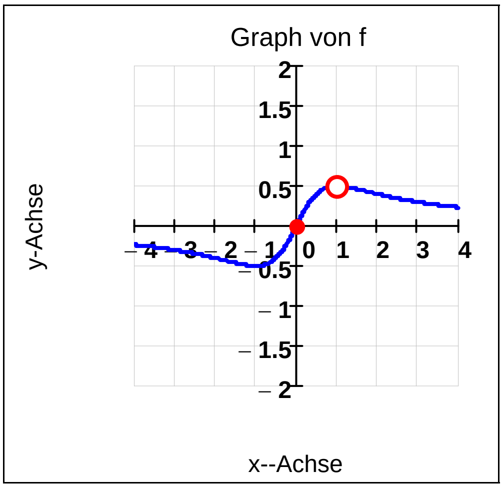
Rechtsseitige Annäherung an $x_2 = 1$: $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(1+h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(1+h-1)^2}{1+h+1} = "\frac{0}{2}" \to 0$

Die Funktionswerte sind beschränkt und streben gegen einen Grenzwert $g = 0$.

Keine Nullstelle!

<u>Beispiel 8</u>

$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 - x^2 + x - 1}$ $\qquad D = IR \setminus \{1\}$



Stetige Fortsetzung: $f_{gek}(x) = \frac{x \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x^2+1)} = \frac{x}{x^2+1}$

Linksseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(1-h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1-h}{(1-h)^2+1} \to \frac{1}{2}$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(1+h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1+h}{(1+h)^2+1} \to \frac{1}{2}$

Nullstelle: $x_1 = 0$ einfach

1.5 Beispiele zum Verhalten im Unendlichen

1.5.1 Waagrechte Asymptote

Grad des Zählerpolynoms u(x) = Grad des Nennerpolynoms v(x)
(d.h. f(x) ist **<u>unecht</u>** gebrochen rationale Funktion)
Vorgehensweise: Ausklammern der höchsten Potenz von x ergibt $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) \to c \quad \wedge \quad c \neq 0$.

Grad des Zählerpolynoms u(x) < Grad des Nennerpolynoms v(x)
(d.h. f(x) ist **<u>echt</u>** gebrochen rationale Funktion).
Vorgehensweise: Ausklammern der höchsten Potenz von x ergibt $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) \to 0$.

<u>Beispiel 9</u>

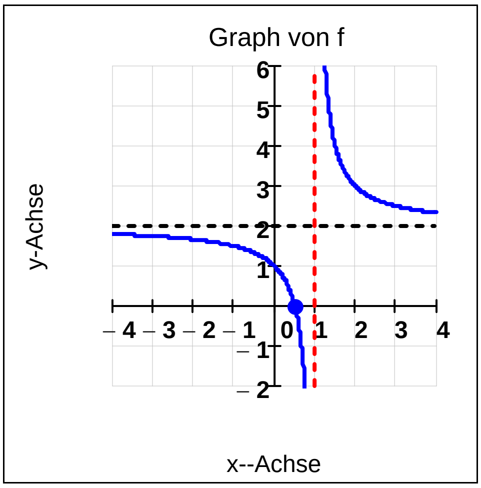
$f(x) = \frac{2x-1}{x-1} \qquad D = IR \setminus \{1\}$

Linksseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} \frac{2(1-h)-1}{1-h-1} = "\frac{1}{0^-}" \to -\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)-1}{1+h-1} = "\frac{1}{0^+}" \to +\infty$$



Senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel: $x = 1$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x\cdot\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \to 2$$

Waagrechte Asymptote $k(x) = 2$; Nullstelle: $x_1 = 0{,}5$ einfach

<u>Beispiel 10</u>

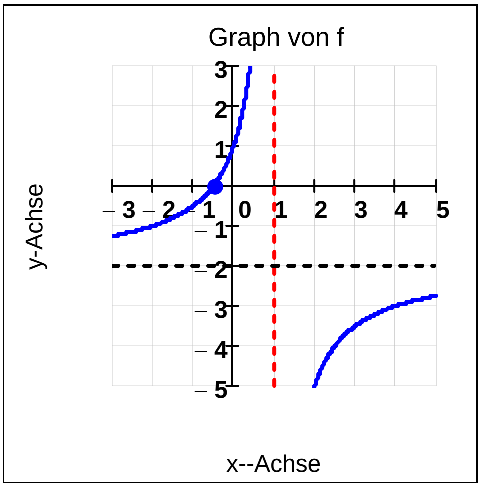
$f(x) = \frac{-2x-1}{x-1} \qquad D = IR \setminus \{1\}$

Linksseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} \frac{-2(1-h)-1}{1-h-1} = "\frac{-3}{0^-}" \to +\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} \frac{-2(1+h)-1}{1+h-1} = "\frac{-3}{0^+}" \to -\infty$$



Senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel $x = 1$

Verhalten im Unendlichen:

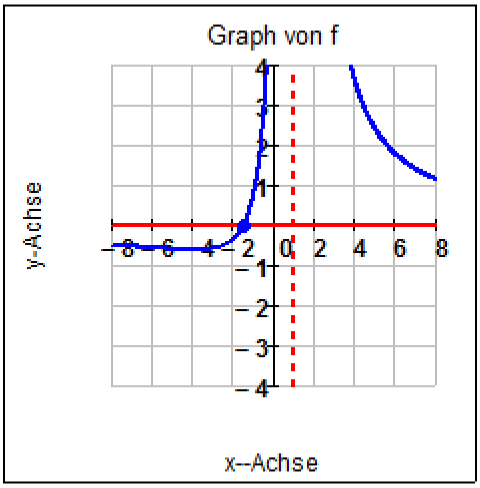
$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{-2x-1}{x-1} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x\cdot\left(-2-\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{-2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \to -2$$

waagrechte Asymptote $k(x) = -2$.

Nullstelle: $x_1 = -0{,}5$ einfach.

<u>Beispiel 11</u>

$$f(x) = \frac{6x+9}{(x-1)^2} \qquad D = IR\setminus\{1\}$$



Linksseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} \frac{6(1-h)+9}{(1-h-1)^2} = "\frac{15}{0^+}" \to +\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} \frac{6(1+h)+9}{(1+h-1)^2} = "\frac{15}{0^+}" \to +\infty$$

Senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel: $x = 1$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \frac{6x+9}{(x-1)^2} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x\cdot\left(6+\frac{9}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\overbrace{\left(6+\frac{9}{x}\right)}^{\to 6}}{\underbrace{x}_{\to\infty}\underbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}} \to 0$$

Horizontale Asymptote $k(x) = 0$;

Nullstelle: $x_1 = -1{,}5$ einfach.

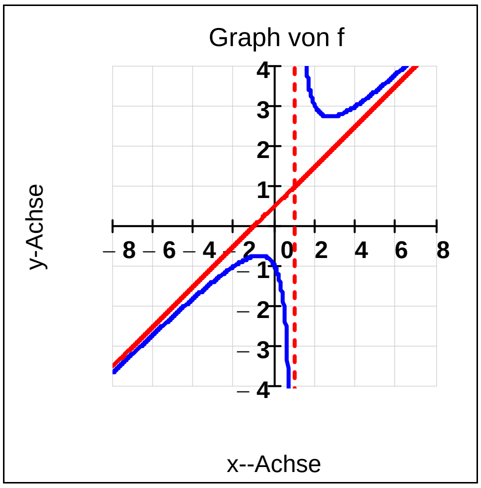
1.5.2 Schiefe Asymptote

Grad des Zählerpolynoms u(x) = Grad des Nennerpolynoms v(x) + 1
(d.h. f(x) ist **unecht** gebrochen rationale Funktion).

Vorgehensweise: Zerlegung in ganzrationalen Anteil und echt gebrochenrationalen Anteil durch Polynomdivision mit Rest: $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to\infty}(a\,x + b + R(x)) \quad \wedge \quad a \neq 0$.

Beispiel 12

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1}{x-1} \qquad D = IR \setminus \{1\}$$



Linksseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} \frac{0{,}5(1-h)^2+1}{1-h-1} = \text{"}\frac{1{,}5}{0^-}\text{"} \to -\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} \frac{0{,}5(1+h)^2+1}{1+h-1} = \text{"}\frac{1{,}5}{0^+}\text{"} \to +\infty$$

Polynomdivision mit Rest: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot(x-1)}$

Verhalten im Unendlichen:

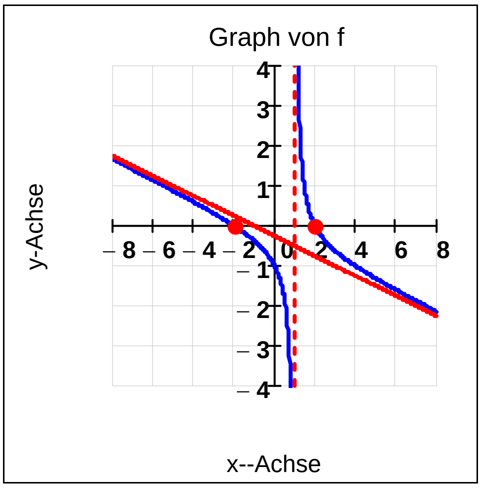
$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{3}{2\cdot(x-1)}}_{\to 0}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad x \to +\infty \\ -\infty & \text{für} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

Schiefe Asymptote: $k(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Folgerung:
Wenn IxI gegen Unendlich geht, nähert sich die Funktion immer mehr der schiefen Asymptote $k(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ an.

Beispiel 13

$$f(x)=\frac{-x^2+4}{4\cdot(x-1)} \qquad D=IR\setminus\{1\}$$



Linksseitige Annäherung an $x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(1-h)=\lim_{h\to 0}\frac{-(1-h)^2+4}{4\cdot(1-h-1)}=\text{"}\frac{3}{0^-}\text{"}\to -\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(1+h)=\lim_{h\to 0}\frac{-(1+h)^2+4}{4\cdot(1+h-1)}=\text{"}\frac{3}{0^+}\text{"}\to +\infty$$

Senkrechte Asymptote: $x_0=1$

Nullstellen: $x_1=-2;\ x_1=2;$

Polynomdivision mit Rest: $f(x)=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}+\frac{3}{4x-4}$

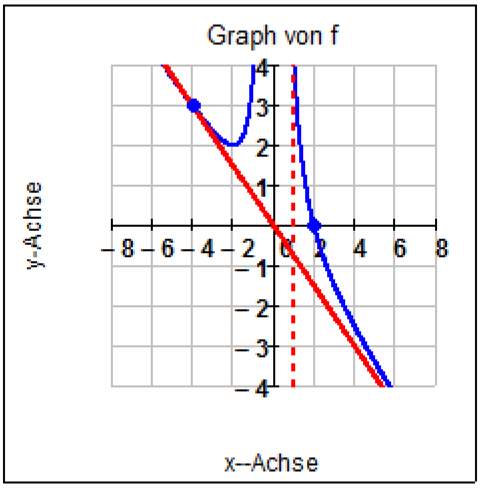
Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)=\lim_{|x|\to\infty} f(x)=\lim_{|x|\to\infty}\left[-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{3}{4\cdot(x-1)}}_{\to 0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{für} \quad x\to+\infty\\ +\infty & \text{für} \quad x\to-\infty\end{cases}$$

Schiefe Asymptote: $k(x)=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$

Beispiel 14

$$f(x)=\frac{-3x^3+4x+16}{4x^2} \qquad D=IR\setminus\{0\}$$



Linksseitige Annäherung an $x_0=0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(0-h)=\lim_{h\to 0}\frac{-3(-h)^3+4(-h)+16}{4(-h)^2}$$

$$=\text{"}\frac{16}{0^+}\text{"}\to +\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(0+h)=\lim_{h\to 0}\frac{-3h^3+4h+16}{4h^2}=\text{"}\frac{16}{0^+}\text{"}\to +\infty$$

Polynomdivision mit Rest: $f(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{x+4}{x^2}$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty}\left[-\frac{3}{4}x + \underbrace{\frac{x+4}{x^2}}_{\to 0}\right] = \begin{cases} -\infty & \text{für} \quad x \to +\infty \\ +\infty & \text{für} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

Schiefe Asymptote: $k(x) = -\frac{3}{4}x$

Bestimmung des Schnittpunktes des Graphen von f mit der schiefen Asymptote:

$$f(x) = k(x) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{4}x + \frac{x+4}{x^2} = -\frac{3}{4}x \quad \Leftrightarrow \quad x+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_S = -4; \quad y_S = k(x_S) = 3$$

Schnittpunkt: $S(-4/3)$

Polynomdivision ohne Rest:

$-3x^3 + 4x + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)\cdot(-3x^2 - 6x - 8) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2=0; -3x^2 - 6x - 8 \neq 0$

Nullstelle: $x_1 = 2$

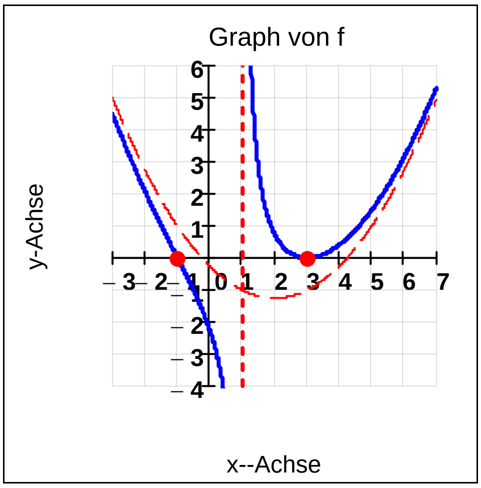
1.5.3 Asymptotische Kurve

f(x) ist **unecht** gebrochenrationale Funktion und der Grad des Zählerpolynoms u(x) ist um mindestens 2 größer als Grad des Nennerpolynoms v(x).

Vorgehensweise: Zerlegung in ganzrationalen Anteil und echt gebrochenrationalen Anteil durch Polynomdivision mit Rest: $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to\infty} (\sum\limits_{i=0}^{m-n} a_i x^i + R(x)) \quad \wedge \quad a_2 \neq 0$.

Beispiel 15

$f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{4(x-1)} \qquad D = IR \setminus \{1\}$



Linksseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)^3 - 5(1-h)^2 + 3(1-h) + 9}{4(1-h-1)}$$
$$= "\frac{8}{0^-}" \to -\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 5(1+h)^2 + 3(1+h) + 9}{4(1+h-1)} = "\frac{8}{0^+}" \to +\infty$$

Polynomdivision mit Rest: $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x - \dfrac{1}{4} + \dfrac{8}{4x-4}$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} \left[\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{8}{4x-4}}_{\to 0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad x \to +\infty \\ +\infty & \text{für} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

Asymptotische Kurve: $k(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x - \dfrac{1}{4}$

Polynomdivision ohne Rest:
$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\cdot(x^2 - 6x + 9) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\cdot(x-3)^2 = 0$

Nullstellen: $x_1 = -1$ einfach; $x_2 = 3$ zweifach;

1.6 Symmetrieeigenschaften

1.6.1 Achsensymmetrie zur y-Achse

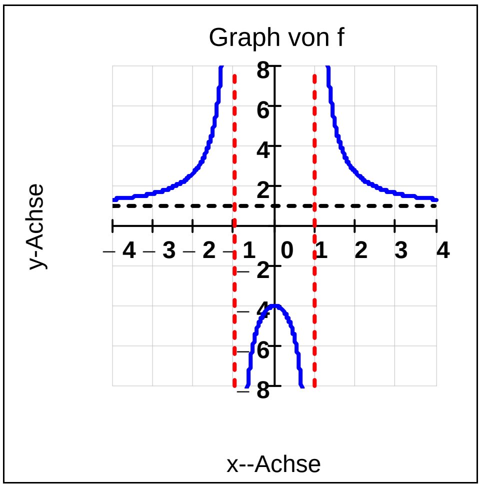
Der Graph einer Funktion f ist ***achsensymmetrisch zur y-Achse***, falls gilt:

$$\mathbf{f(-x) = f(x)}$$

Für den Funktionsterm bedeutet das konkret:
Zähler und Nenner enthalten **nur gerade** Hochzahlen **oder**
Zähler und Nenner enthalten **nur ungerade** Hochzahlen

<u>Beispiel 16</u>

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1} \qquad D = \mathrm{IR} \setminus \{-1; 1\}$$



Symmetrienachweis:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+4}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+4}{x^2-1} = f(x),$$

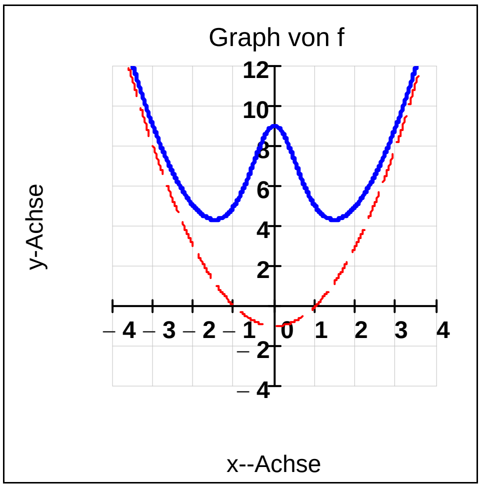
also Achsensymmetrie.

Senkrechte Asymptoten mit VZW: $x_1 = -1;\ x_2 = 1$

Waagrechte Asymptote: $k(x) = 1$

<u>Beispiel 17</u>

$$f(x) = \frac{x^4+9}{x^2+1} \qquad D = \mathrm{IR}$$



Symmetrienachweis:

$$f(-x) = \frac{(-x)^4+9}{(-x)^2+1} = \frac{x^4+9}{x^2+1} = f(x),$$

also Achsensymmetrie.

Polynomdivision mit Rest: $f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{10}{x^2+1}$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} \left[x^2 - 1 + \frac{10}{\underbrace{x^2+1}_{\to 0}} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad x \to +\infty \\ +\infty & \text{für} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

Asymptotische Kurve: $k(x) = x^2 - 1$

1.6.2 Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung

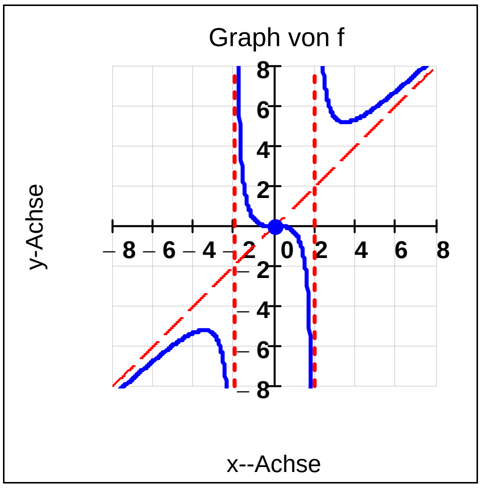
Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, falls gilt:

$$\mathbf{f(-x) = -f(x)}$$

Für den Funktionsterm bedeutet das konkret:
Zähler enthält **nur gerade** Hochzahlen **und** Nenner **nur ungerade** Hochzahlen **oder**
Zähler enthält **nur ungerade** Hochzahlen **und** Nenner **nur gerade** Hochzahlen.

<u>Beispiel 18</u>

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-2;\ 2\}$$



Senkrechte Asymptoten: $x_1 = -2;\ x_2 = 2;$

Symmetrienachweis:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)\,,$$

also Punktsymmetrie.

Nullstelle: $x_0 = 0$ dreifach.

Polynomdivision mit Rest: $f(x) = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$

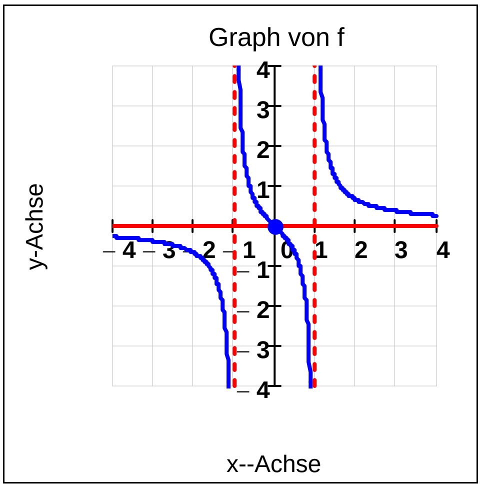
Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} \left[x + \underbrace{\frac{4x}{x^2 - 4}}_{\to 0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad x \to +\infty \\ -\infty & \text{für} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

Schiefe Asymptote: $k(x) = x$

<u>Beispiel 19</u>

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1;\ 1\}$$



Senkrechte Asymptoten: $x_1 = -1;\ x_2 = 1;$

Symmetrienachweis:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)\,,$$

also Punktsymmetrie.

Waagrechte Asymptote:

Nullstelle: $x_0 = 0$ einfach.

2 Differentiation rationaler Funktionen

Im Folgenden werden die Ableitungen von Produkt, Quotient und Verkettung ganzrationaler Funktionen mithilfe des Differentialquotienten hergeleitet.

2.1 Ableitung nach der Potenzregel

Der ***Differentialquotient*** $\boxed{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = f'(x)}$

als Hilfsmittel zur Bestimmung der Ableitung von Funktionen ist aus dem Kapitel ***Ableitung ganzrationaler Funktionen*** bekannt.

Es gilt: Potenzfunktion: $f(x) = x^n$; Ableitung der Potenzfunktion: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Bemerkung

Dies kann über den Differentialquotienten mithilfe des binomischen Lehrsatzes hergeleitet werden.

Die Regel gilt auch für reine Potenzfunktionen mit **negativem** Exponenten:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \;;\quad f'(x) = -n \cdot x^{-n-1} = -n \cdot x^{-(n+1)} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}}}.$$

Im Folgenden werden die Ableitungen einiger Spezialfälle mithilfe des Differentialquotienten hergeleitet.

Beispiel 1

Funktionsterm: $f_1(x) = \frac{1}{x}$

Differenzenquotient: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - x - h}{(x+h) \cdot x}}{h} = \frac{-h}{h \cdot (x+h) \cdot x} = \frac{-1}{(x+h) \cdot x}$

Differentialquotient: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{-1}{(x+h) \cdot x} \right] = \frac{-1}{x^2} = f_1'(x)$

Beispiel 2

Funktionsterm: $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$

Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \frac{\frac{x^2 - (x+h)^2}{(x+h)^2 \cdot x^2}}{h} = \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{h \cdot (x+h)^2 \cdot x^2} = \frac{-(2x+h)}{(x+h)^2 \cdot x^2}$$

Differentialquotient: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to\infty 0}\left[\frac{-(2x+h)}{(x+h)^2\cdot x^2}\right]=\frac{-2}{x^3}=f_2\,'(x)$

2.2 Ableitung nach der Produktregel

Gegeben ist die Funktion f als Produkt der differenzierbaren Funktion u und v:

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

Im Folgenden wird die Ableitung von f über den Differentialquotienten hergeleitet.

Ansatz Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x)}{h}$$

Subtrahieren und addieren des Terms $u(x)\cdot v(x+h)$ im Zähler:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x+h)+u(x)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x)}{h}$$

Zerlegung des Bruchterms in zwei Brüche:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left[\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x+h)}{h}+\frac{u(x)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x)}{h}\right]$$

Ausklammern von Faktoren:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x+h)+u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

Grenzübergang zum Differentialquotienten:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x+h)+u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

Nach den Grenzwertregeln kann man alle Grenzwerte separat ausrechnen:

$$f\,'(x)=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}v(x+h)}_{v(x)}+\underbrace{\lim_{h\to 0}u(x)}_{u(x)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}_{v'(x)}$$

Nach dem Grenzübergang folgt die Produktregel:

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(x)=f\,'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)}$$

Beispiel 1

$f(x) = (2x-5)\cdot(x^2+4x+3)$

$f'(x) = 2\cdot(x^2+4x+3)+(2x-5)\cdot(2x+4) = 2x^2+8x+6+4x^2+8x-10x-20$
$\quad = 6x^2+6x-14$

Probe: Ableitung der ausmultiplizierten Funktionsgleichung

$f(x) = 2x^3+8x^2+6x-5x^2-20x-15 = 2x^3+3x^2-14x-15$

$f'(x) = 6x^2+6x-14$

Beispiel 2

$f(x) = (x^2-4x+3)^2 = (x^2-4x+3)\cdot(x^2-4x+3)$

$f'(x) = (2x-4)\cdot(x^2-4x+3)+(x^2-4x+3)\cdot(2x-4)$
$\quad = 2x^3-8x^2+6x-4x^2+16x-12+2x^3-8x^2+6x-4x^2+16x-12$
$\quad = 4x^3-24x^2+44x-24$

Probe: Ableitung des ausmultiplizierten Funktionsterms

$f(x) = (x^2-4x+3)^2 = x^4-8x^3+6x^2-24x+16x^2+9 = x^4-8x^3+22x^2-24x+9$

$f'(x) = 4x^3-24x^2+44x-24$

2.3 Ableitung nach der Quotientenregel

Gegeben ist der Quotient zweier differenzierbarer Funktionen u und v:

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad \wedge \quad v(x)\neq 0 \;\; (1)$$

Umformung des Quotienten in ein Produkt:

$$f(x)\cdot v(x)=u(x)$$

Bildung der Ableitung nach der Produktregel:

$$f'(x)\cdot v(x)+f(x)\cdot v'(x)=u'(x)$$

Auflösen nach $f'(x)$: $f'(x)=\frac{u'(x)}{v(x)}-f(x)\cdot\frac{v'(x)}{v(x)}$ (2)

Einsetzen (1) in (2) $\quad f'(x)=\frac{u'(x)}{v(x)}-\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\frac{v'(x)}{v(x)}$

Zusammenfassen zu einem Bruchterm:

$$\boxed{f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}}$$

<u>Beispiel1</u>

$$f_1(x)=\frac{4x^2+3x-2}{x-1};\; D=\mathrm{IR}\setminus\{1\}$$

$$f_1'(x)=\frac{(8x+3)\cdot(x-1)-\left(4x^2+3x-2\right)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-8x-1}{(x-1)^2}$$

<u>Beispiel 2</u>

$$f_2(x)=\frac{2x^2+x}{x^2-1};\; D=\mathrm{IR}\setminus\{-1;1\}$$

$$f_2'(x)=\frac{(4x+1)\cdot\left(x^2-1\right)-\left(2x^2+x\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{4x^3-4x+x^2-1-4x^3-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-x^2-4x-1}{\left(x^2-1\right)^2}$$

2.4 Ableitung nach der Kettenregel

2.4.1 Verknüpfung von Funktionen

Gegeben sind die Funktionen $u(x) = x^2$ und $v(x) = x + 1$.

Sie können nun miteinander verknüpft (verkettet) werden:

$u \circ v = u\left(v(x)\right) = \left(x+1\right)^2$ (Sprich *u Ringel v*, u kommt nach v)

$v \circ u = v\left(u(x)\right) = x^2 + 1$ (Sprich *v Ringel u*, v kommt nach u)

2.4.2 Die Ableitung von verketteten Funktionen

$y = f(x) = u(v(x))$ mit der äußeren Funktion u(v) und der inneren Funktion v(x).

Beide Funktionen u und v seien differenzierbar, z. B. v(x) an der Stelle x_0 und analog u(v) an der Stelle $v_0 = v(x_0)$.

Ansatz Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u\left(v(x+h)\right) - u\left(v(x)\right)}{h}$$

Multiplizieren mit $\dfrac{v(x+h) - v(x)}{v(x+h) - v(x)}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\left(v(x+h)\right) - u\left(v(x)\right)}{h} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{v(x+h) - v(x)}$$

Umordnen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\left(v(x+h)\right) - u\left(v(x)\right)}{v(x+h) - v(x)} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Differentialquotient:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{u\left(v(x+h)\right) - u\left(v(x)\right)}{v(x+h) - v(x)} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]$$

Anwendung der Grenzwertregel für ein Produkt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{u\left(v(x+h)\right) - u\left(v(x)\right)}{v(x+h) - v(x)}\right] \cdot \lim_{h \to 0}\left[\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]$$

Interpretation der Grenzwerte:

Der 1. Faktor: $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{u(v(x+h)-u(v(x))}{v(x+h)-v(x)}\right] = \lim\limits_{v(x+h)-v(x)\to 0}\left[\dfrac{u(v(x+h)-u(v(x))}{v(x+h)-v(x)}\right] = u'(v(x))$

Der 2. Faktor: $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{v(x+\Delta h)-v(x)}{h}\right] = v'(x)$

$$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}\left[u(v(x))\right] = \frac{du(v)}{dv}\cdot\frac{dv(x)}{dx} = u'(v)\cdot v'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)}$$

Verwendet man die Differentialschreibweise von Leibniz für die jeweiligen Ableitungen, wird die Darstellung der Kettenregel sehr prägnant:

$$\boxed{f'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}}$$ *äußere Ableitung mal innere Ableitung*

<u>Beispiel 1</u>

Funktionsterm: $f_1(x) = (3x^2+2x+1)^5$;

Ableitungsfunktion: $f_1'(x) = 5\cdot(3x^2+2x+1)^4\cdot(6x+2)$

<u>Beispiel 2</u>

Funktionsterm: $f_2(x) = \dfrac{1}{(3x^2+2x+1)^5} = (3x^2+2x+1)^{-5}$; $D = IR$

Ableitungsfunktion: $f_2'(x) = -5\cdot\left(3x^2+2x+1\right)^{-6}\cdot\left(6x+2\right) = \dfrac{-5\cdot\left(6x+2\right)}{(3x^2+2x+1)^6}$

<u>Beispiel 3</u>

Funktionsterm: $f_3(x) = \dfrac{2x-5}{(x-1)^2}$; $D = IR\setminus\{1\}$

Ableitungsfunktion: $f_3'(x) = \dfrac{2\cdot(x-1)^2-(2x-5)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2x-2-4x+10}{(x-1)^3} = \dfrac{-2x+8}{(x-1)^3}$

3 Integration einfacher gebrochenrationaler Funktionen

Funktionstyp 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ mit $x \in IR \setminus \{0\}$; $n \in IN \setminus \{1\}$;

Stammfunktion:

$$F(x) = \int x^{-n} dx = \frac{1}{-n+1} \cdot x^{-n+1} + K = \frac{1}{-n+1} \cdot x^{-(n-1)} + K = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + K$$

Funktionstyp 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{(ax+b)^n} = (ax+b)^{-n}$ mit $x \in IR \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$; $n \in IN \setminus \{1\}$.

Stammfunktion:

$$F(x) = \int (ax+b)^{-n} dx = \frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{a} \cdot (ax+b)^{-n+1} + K = \frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{a} \cdot (ax+b)^{-(n-1)} + K$$

$$= \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + K$$

Beispiel 1

$f_1(x) = \frac{1}{(2x+1)^5} = (2x+1)^{-5}$ mit $x \in IR \setminus \{-0{,}5\}$.

Stammfunktion:

$$F_1(x) = \int \frac{1}{(2x+1)^5} dx = \int (2x+1)^{-5} dx = \frac{1}{-5+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+1)^{-5+1} + K = \frac{-1}{8} \cdot \frac{1}{(2x+1)^4} + K$$

Beispiel 2

$f_2(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^5} = \left(\frac{1}{2}x+1\right)^{-5}$ mit $x \in IR \setminus \{-2\}$.

Stammfunktion:

$$F_2(x) = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^5} dx = \int \left(\frac{1}{2}x+1\right)^{-5} dx = \frac{1}{-5+1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x+1\right)^{-5+1} + K = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4} + K$$

Funktionstyp 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ mit $x \in IR \setminus \{ 0 \}$, $n \in IN \setminus \{1\}$.

Stammfunktion:

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln(| x |) + K$$

Funktionstyp 4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{a x + b}$ mit $x \in IR \setminus \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$, $n \in IN \setminus \{1\}$.

Stammfunktion:

$$F(x) = \int \frac{1}{a x + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(| a x + b |) + K$$

<u>Beispiel 3</u>

$$f_3(x) = \frac{1}{2 x + 1} \text{ mit } x \in IR \setminus \{ -0{,}5 \}.$$

Stammfunktion:

$$F_3(x) = \int \frac{1}{2 x + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(| 2 x + 1 |) + K$$

<u>Beispiel 4</u>

$$f_4(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} x + 1} \text{ mit } x \in IR \setminus \{ -2 \}.$$

Stammfunktion:

$$F_4(x) = \int \frac{1}{\frac{1}{2} x + 1} dx = 2 \cdot \ln\left(\left| \frac{1}{2} x + 1 \right| \right) + K$$

Funktionstyp 5

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{a\,x^2 + b\,x + c}{x} = a\,x + b + \frac{c}{x}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Stammfunktion:

$$F(x) = \int \left(a\,x + b + \frac{c}{x} \right) dx = a\frac{x^2}{2} + b\,x + c \cdot \ln\left(|x|\right) + K$$

Beispiel 5

$$f_5(x) = \frac{4\,x^2 + 2\,x + 3}{x} = 4\,x + 2 + \frac{3}{x} \text{ mit } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Stammfunktion:

$$F_4(x) = \int \left(4\,x + 2 + \frac{3}{x} \right) dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2\,x + 3 \cdot \ln\left(|x|\right) + K$$

Funktionstyp 6

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{a\,x^2 + b\,x + c}{x^2} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Stammfunktion:

$$F(x) = \int \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right) dx = a\,x + b \cdot \ln\left(|x|\right) - \frac{c}{x} + K$$

Beispiel 6

$$f_6(x) = \frac{4\,x^2 + 2\,x + 3}{x^2} = 4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \text{ mit } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Stammfunktion:

$$F_6(x) = \int \left(4 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = 4\,x + 2 \cdot \ln\left(|x|\right) - \frac{3}{x} + K$$

Funktionstyp 7

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{a\,x^2+b\,x+c}{x-1}=a+b+a\,x+\dfrac{a+b+c}{x-1}$ mit $x\in\mathrm{IR}\setminus\{1\}$, $n\in\mathrm{IN}\setminus\{1\}$.

Stammfunktion:

$$F(x)=\int\left(a+b+a\,x+\frac{a+b+c}{x-1}\right)dx=(a+b)\,x+a\cdot\frac{x^2}{2}+(a+b+c)\cdot\ln\left(\left|x-1\right|\right)+K$$

<u>Beispiel 7</u>

$$f_7(x)=\frac{4\,x^2+2\,x+3}{x-1}=4\,x+6+\frac{9}{x-1}\ \text{ mit } x\in\mathrm{IR}\setminus\{1\}.$$

Stammfunktion:

$$F_7(x)=\int\left(4\,x+6+\frac{9}{x-1}\right)dx=2\,x^2+6\,x+9\cdot\ln\left(\left|x-1\right|\right)+K$$

<u>Beispiel 8</u>

$$f_8(x)=\frac{4\,x^2+2\,x+3}{2\,x-1}=2\,x+2+\frac{5}{2\,x-1}\ \text{ mit } x\in\mathrm{IR}\setminus\{-0{,}5\}.$$

Stammfunktion:

$$F_8(x)=\int\left(2\,x+2+\frac{5}{2\,x-1}\right)dx=x^2+2\,x+\frac{5}{2}\cdot\ln\left(\left|2\,x-1\right|\right)+K$$

<u>Beispiel 9</u>

$$f_9(x)=\frac{4\,x^2+2\,x+3}{\frac{1}{2}x-1}=8\,x+20+\frac{23}{\frac{1}{2}x-1}\ \text{ mit } x\in\mathrm{IR}\setminus\{2\}.$$

Stammfunktion:

$$F_9(x)=\int\left(8\,x+20+\frac{23}{\frac{1}{2}x-1}\right)dx=4\,x^2+20\,x+46\cdot\ln\left(\left|\frac{1}{2}x-1\right|\right)+K$$

Funktionstyp 8

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{v'(x)}{v(x)}$ mit $v(x)\neq 0$.

Stammfunktion:

$$F(x)=\int \frac{v'(x)}{v(x)}dx=\ln\left(\left|v(x)\right|\right)+K$$

<u>Beispiel 10</u>

$$f_{10}(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+1} \text{ mit } x\in IR\setminus\{-1\}.$$

Stammfunktion: $F_{10}(x)=\int\left(\dfrac{2x+2}{x^2+2x+1}\right)dx=\ln\left(\left|x^2+2x+1\right|\right)+K$

<u>Beispiel 11</u>

$$f_{11}(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+1} \text{ mit } x\in IR\setminus\{-1\}.$$

Stammfunktion: $F_{11}(x)=\int\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+2}{x^2+2x+1}\right)dx=\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\left|x^2+2x+1\right|\right)+K$

$$F_{10}(x)=\int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+1}\right)dx=\ln\left(\left|x^2+2x+1\right|\right)+K$$