Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2002
Mathematik 13 Technik - A I - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist die reelle Funktion f in der in IR maximalen Definitionsmenge D_f durch

$$f(x) := \arctan\left(\frac{3\cdot x^2}{1-2\cdot x}\right) \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)
Geben Sie die Definitionsmenge D_f sowie Nullstelle von f an, und untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to 0.5$ sowie für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$. Geben Sie die Gleichungen der horizontalen Asymptoten des Graphen von f an.

Argumentfunktion: $h(x) := \dfrac{3\cdot x^2}{1-2\cdot x}$

Definitionslücke: $n(x) := \mathrm{denom}(h(x)) = 2\cdot x - 1$

$n(x) = 0 \to 2\cdot x - 1 = 0 \text{ auflösen}, x \to \dfrac{1}{2}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{2} \}$

Nullstellenbedingung: $z(x) := \mathrm{numer}(h(x)) \to -3\cdot x^2$

$z(x) = 0 \to -3\cdot x^2 = 0 \text{ auflösen}, x \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nullstelle: $x_0 = 0$ zweifach

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{3\cdot x^2}{1-2\cdot x} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) \to \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{3\cdot x^2}{1-2\cdot x} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3\cdot x^2}{1-2\cdot x} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \to \frac{\pi}{2}$$

horizontale Asympote $y_1 := \dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3\cdot x^2}{1-2\cdot x} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} f(x) \to -\frac{\pi}{2}$$

horizontale Asympote $y_2 := -\dfrac{\pi}{2}$

Teilaufgabe 1.2 **(8 BE)**
Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion streng monoton ist, und ermitteln Sie Art und Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f.

[Zwischenergebnis: $f'(x) = \dfrac{6 \cdot x - 6 \cdot x^2}{(1 - 2 \cdot x)^2 + 9 \cdot x^4}$]

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x}\right)^2} \cdot \frac{(1 - 2 \cdot x) \cdot 6 \cdot x - 3 \cdot x^2 \cdot (-2)}{(1 - 2x)^2} = \frac{1}{(1 - 2 \cdot x)^2 + 9 \cdot x^4} \cdot \left(6 \cdot x - 12 \cdot x^2 + 6 \cdot x^2\right)$$

$$f'(x) := \frac{6 \cdot x - 6 \cdot x^2}{(1 - 2 \cdot x)^2 + 9 \cdot x^4}$$

Horizontale Tangenten:

$z'(x) := \text{numer}(f'(x)) \rightarrow 6 \cdot x - 6 \cdot x^2$

$x_E := z'(x) = 0 \rightarrow 6 \cdot x - 6 \cdot x^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Extrema abrufen: $x_{E1} := x_{E_1}$ $\quad x_{E2} := x_{E_2}$

$x_{E1} = 0$ $\quad x_{E2} = 1$

		$x = 0$		$x \neq \frac{1}{2}$		$x = 1$	
Zähler	neg		pos		pos		neg
Nenner	pos		pos		pos		pos
f'(x)	neg		pos		pos		neg
G_f	smf		sms		sms		smf
		TP				HP	

$f(0) = 0$

TP(0 / 0)

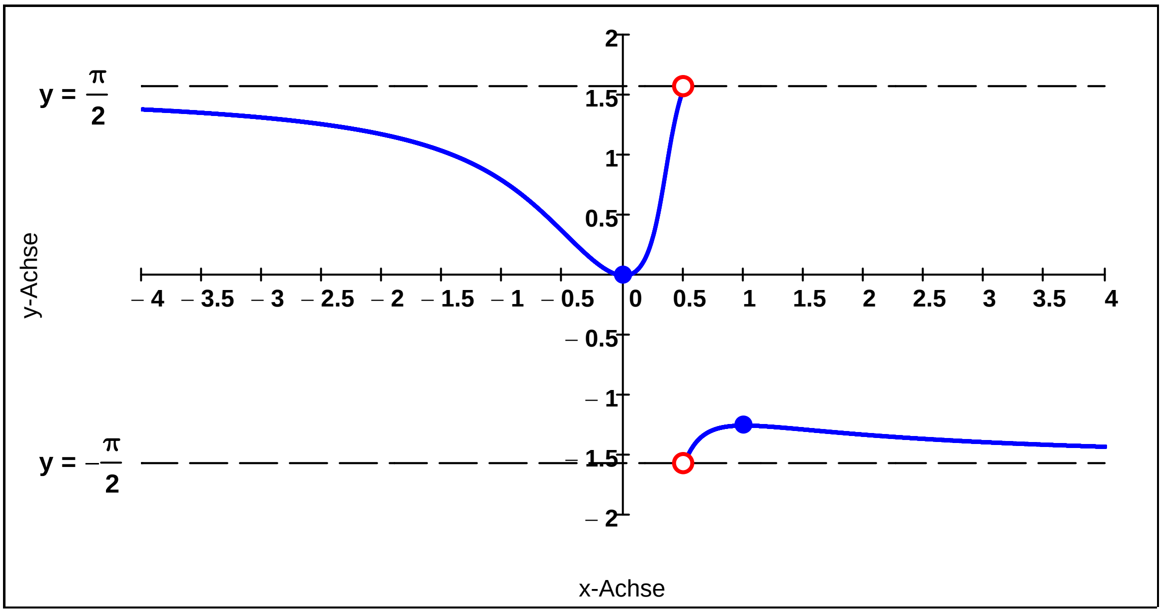
$f(1) = -\text{atan}(3) = -1.25$

HP(1 / $-\text{arctan}(3)$)

G_f ist streng monoton fallend in $]-\infty \;;\; 0]$ und in $[\,1 \;;\; \infty\,[$

G_f ist streng monoton steigend in $[\,0 \;;\; \frac{1}{2}\,[$ und in $]\,\frac{1}{2} \;;\; 1\,]$

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von f und seine horizontalen Asymptoten für $-1 \le x \le 2$ in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 4 cm ein, und geben Sie die Wertemenge von f an.



Wertemenge: $W = \left] \frac{-\pi}{2} ; -\arctan(3) \right] \cup \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right[$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)

Gegeben ist die Integralfunktion **F** durch $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt$ und $D_F = \left] -\infty ; 0.5 \right[$.

Geben Sie die Anzahl und die Lage der Nullstellen von F sowie das Krümmungsverhalten des Graphen von F und die Abszisse seines Wendepunktes an, ohne das Integral zu berechnen, und begründen Sie Ihre Antworten.

$F(-1) = \int_{-1}^{-1} f(t)\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1$ ist eine Nullstelle von F

Monotonie von F $\Leftrightarrow$ Verhalten von F' $\Leftrightarrow$ Verhalten von f

$f(x) > 0$ für $x < 0 \quad \Rightarrow \quad G_F$ ist streng monoton steigend $\Rightarrow \quad x_0 = -1$ einzige Nullstelle

Krümmungsverhalten von F $\Leftrightarrow$ Verhalten von F'' $\Leftrightarrow$ Verhalten von f '

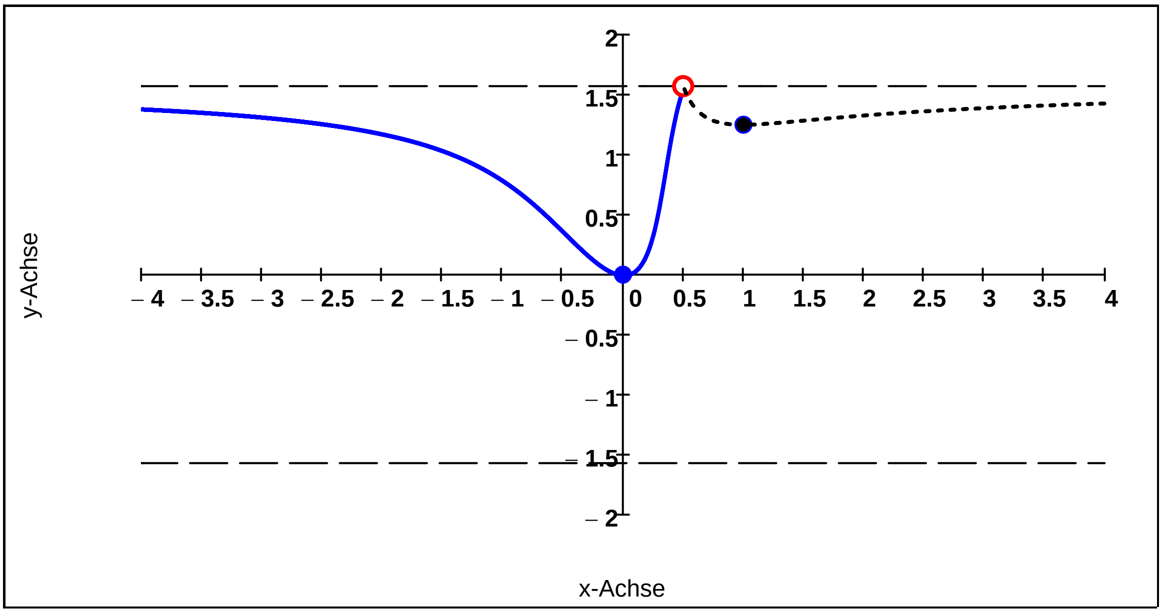
G_F ist rechtsgekrümmt in $\left] -\infty ; 0 \right]$ und linksgekrümmt in $\left[0 ; \frac{1}{2} \right[\Rightarrow$ Wendepunkt $x_W = 0$

Teilaufgabe 1.5 (5 BE)

Gegeben ist eine Funktion g durch $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x < 0.5 \\ (-f(x)) & \text{if } x > 0.5 \end{cases}$.

Zeigen Sie, dass $x = 0.5$ eine stetig behebbare Definitionslücke von g ist, und geben Sie die stetige Fortsetzung **g_** von g an. Untersuchen Sie, ob **g_** an der Stelle $x = 0.5$ differenzierbar ist.

Graphische Darstellung nicht verlangt:



linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \arctan\left(\frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{ist stetig behebbare Def.lücke}$$

rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} -\arctan\left(\frac{3 \cdot x^2}{1 - 2 \cdot x}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

stetige Fortsetzung: $$g\_(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x < 0.5 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0.5 \\ (-f(x)) & \text{if } x > 0.5 \end{cases}$$

Ableitungsfunktion:
$$g'\_(x) = \begin{cases} \dfrac{6\cdot x - 6\cdot x^2}{(1-2\cdot x)^2 + 9\cdot x^4} & \text{if } x < 0.5 \\ \dfrac{-\left(6\cdot x - 6\cdot x^2\right)}{(1-2\cdot x)^2 + 9\cdot x^4} & \text{if } x > 0.5 \end{cases}$$

linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{6\cdot x - 6\cdot x^2}{(1-2\cdot x)^2 + 9\cdot x^4} \rightarrow \frac{8}{3}$$

rechtsseitiger Grenzwert:

$\Rightarrow$ bei $x = \frac{1}{2}$ nicht differenzierbar

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{-\left(6\cdot x - 6\cdot x^2\right)}{(1-2\cdot x)^2 + 9\cdot x^4} \rightarrow -\frac{8}{3}$$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist eine Schar reeller Funktionen h_k in der in IR maximalen Definitionsmenge D_{h_k}

durch $h_k(x) = \dfrac{e^x}{\left(k + e^x\right)^3}$ mit $k \in IR \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_{h_k} in Abhängigkeit von k.

Untersuchen Sie das Verhalten von $h_k(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$, sowie für den Fall, dass eine Definitionslücke vorliegt, in der Umgebung dieser Definitionslücke.

Nullstelle des Nenners: $n(x,k) := \left(k + e^x\right)^3$

$$n(x,k) = 0 \to \left(k + e^x\right)^3 = 0 \text{ auflösen}, x \to \ln(-k)$$

keine Lösung, falls $k > 0 \Rightarrow D_{h_k} = IR$

Definitionslücke, falls $k < 0 \Rightarrow D_{h_k} = IR \setminus \{\ \ln(-k)\ \}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{e^x}}{\underset{\underset{k^3}{\downarrow}}{\left(k + e^x\right)^3}} \to 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{e^x}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{\left(k + e^x\right)^3}} \overset{\text{I. H.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{3 \cdot \left(k + e^x\right)^2 \cdot e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{3 \cdot \left(k + e^x\right)^2}} = 0$$

$$\lim_{x \to \ln(-k)^-} \frac{e^x}{\left(k + e^x\right)^3} \text{ annehmen}, k < 0 \;\to -\infty$$

Zähler: $e^x \to -k > 0$; Nenner: $\left(k + e^x\right)^3 \to 0^-$

$$\lim_{x \to \ln(-k)^+} \frac{e^x}{\left(k + e^x\right)^3} \text{ annehmen}, k < 0 \;\to \infty$$

Zähler: $e^x \to -k > 0$; Nenner: $\left(k + e^x\right)^3 \to 0^+$

Teilaufgabe 2.2 **(8 BE)**
Bestimmen Sie Art und Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Graphen von h_k in Abhängigkeit von k sowie die Gleichung der geometrischen Ortskurve, auf der all diese Extrempunkte liegen.

Funktionsterm: $h(x,k) := \dfrac{e^x}{\left(k + e^x\right)^3}$

1. Ableitung: $h'(x,k) := \dfrac{d}{dx}h(x,k) \to \dfrac{e^x \cdot \left(k - 2 \cdot e^x\right)}{\left(k + e^x\right)^4}$

Horizontale Tangenten: $h'(x,k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E(k) := k - 2 \cdot e^x = 0 \text{ auflösen}, x \;\to \ln\left(\frac{k}{2}\right)$

Extrempunkt existiert, falls $k > 0$:

$k - 2 \cdot e^x > 0 \;\left|\; \begin{array}{l}\text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, k > 0\end{array}\right. \to x < \ln\left(\frac{k}{2}\right)$ $\qquad$ G_f ist streng mon. steigend für $x < \ln\left(\frac{k}{2}\right)$

$k - 2 \cdot e^x < 0 \;\left|\; \begin{array}{l}\text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, k > 0\end{array}\right. \to \ln\left(\frac{k}{2}\right) < x$ $\qquad$ G_f ist streng mon. fallend für $x > \ln\left(\frac{k}{2}\right)$

$$y_E(k) := h(x_E(k), k) = \frac{4}{27 \cdot k^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt } H\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right), \frac{4}{27 \cdot k^2}\right) \quad \text{mit } k > 0$$

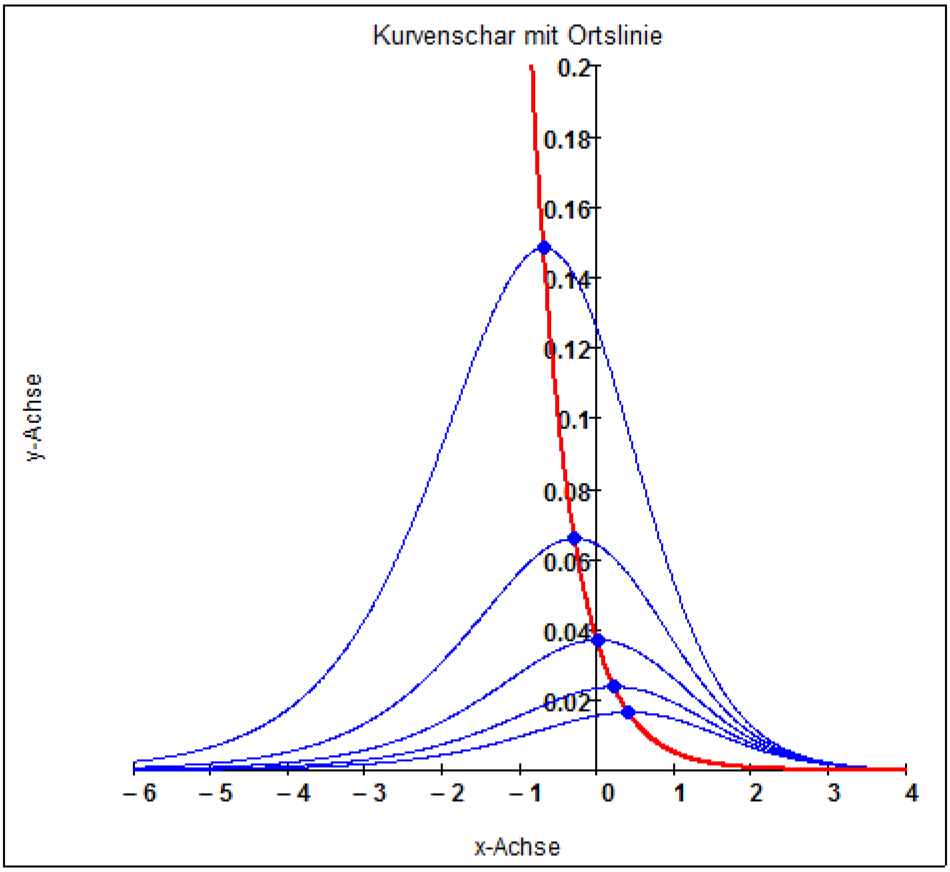
Bestimmung des geometrischen Ortes:

Vorgabe

$$x = \ln\left(\frac{k}{2}\right) \qquad y = \frac{4}{27 \cdot k^2}$$

$$\textbf{Suchen}(k, y)\ \textbf{annehmen} \rightarrow \left| \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 2 \cdot e^{x} \\ \dfrac{e^{-2 \cdot x}}{27} \end{pmatrix} & \text{if } \operatorname{Im}(x) \le \pi \wedge 0 < \pi + \operatorname{Im}(x) \\ \text{undefined} & \text{if } \pi < \operatorname{Im}(x) \vee \pi \le -\operatorname{Im}(x) \end{array} \right.$$

Ortslinie: $$O(x) := \frac{e^{-2 \cdot x}}{27}$$



Teilaufgabe 2.3 (6 BE)

Berechnen Sie für $k \in IR^+$ den Wert des Integrals $J = \int_0^1 h_k(x)\,dx$ in Abhängigkeit von k.

$$J(k) = \int_0^1 \frac{e^x}{\left(k + e^x\right)^3}\,dx$$

Substitution $\quad k + e^x = u \quad\quad u'(x) = e^x$

$$\int \frac{e^x}{u^3}\,dx = \int \frac{1}{u^3}\,du = \frac{1}{-3+1}\cdot\frac{1}{u^2} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(k+e^x\right)^2} + C$$

Stammfunktion: $\quad H(x,k) := -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(k+e^x\right)^2}$

$J(k) := H(1,k) - H(0,k) \quad\quad J(k) = \frac{1}{2\cdot(k+1)^2} - \frac{1}{2\cdot(k+e)^2}$

Teilaufgabe 3.0

Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzen die 80 Millionen Einwohner eines Staates 10 Millionen Handys. Die Anzahl der Handys, die in diesem Staat in Privatbesitz sind, wird durch den Funktionsterm $f(t)$ beschrieben, wobei t in Jahren gemessen wird.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Nach einem vereinfachten Modell gilt für die Anzahl der Handys in Privatbesitz in diesem Staat zum Zeitpunkt t, für $t \geq 0$, die Differentialgleichung:

$\frac{d}{dt}f(t) = 0.2\cdot\left(60\cdot10^6 - f(t)\right)$, wobei $\frac{d}{dt}f(t) = f'(t)$ die Ableitung von $f(t)$ nach der Zeit ist.

Leiten Sie aus dieser Differentialgleichung den Funktionsterm $f(t)$ her.

$$\frac{d}{dt}f(t) = 0.2\cdot\left(60\cdot10^6 - f(t)\right)$$

Trennen der Variablen: $\quad \frac{1}{\left(60\cdot10^6 - f\right)}\cdot df = 0.2\cdot dt$

Integration: $\quad \int \frac{1}{\left(60\cdot10^6 - f\right)}\,df = \int 0.2\,dt$

$$\Rightarrow \quad -\ln\left(\left|60\cdot 10^6 - f\right|\right) = 0.2\cdot t + C$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\left|60\cdot 10^6 - f\right|\right) = -(0.2\cdot t) - C$$

$$\Rightarrow \quad \left|60\cdot 10^6 - f\right| = e^{-(0.2\cdot t)-C}$$

$$\Rightarrow \quad \left|60\cdot 10^6 - f\right| = k\cdot e^{-(0.2\cdot t)} \qquad \text{mit } k = e^{-C}$$

Auflösen des Betrags: $60\cdot 10^6 - f = k\cdot e^{-(0.2\cdot t)} \quad \Rightarrow \quad f(t) = 60\cdot 10^6 - k\cdot e^{-(0.2\cdot t)}$

$-\left(60\cdot 10^6 - f\right) = k\cdot e^{-(0.2\cdot t)} \quad \Rightarrow \quad f(t) = 60\cdot 10^6 + k\cdot e^{-(0.2\cdot t)}$

Allgemeine Lösung: $f(t) = 60\cdot 10^6 - D\cdot e^{-(0.2\cdot t)}$ mit $D \in IR$

triviale Lösung für $D = 0$: $f(t) = 60\cdot 10^6$

Anfangswert. $f(0) = 10\cdot 10^6$

$$\Leftrightarrow \quad 60\cdot 10^6 - D\cdot e^{-0} = 10\cdot 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad D = 50\cdot 10^6$$

Spezielle Lösung: $f(t) := 60\cdot 10^6 - 50\cdot 10^6\cdot e^{-(0.2\cdot t)}$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Nun soll gelten $f(t) = 60\cdot 10^6 - 50\cdot 10^6\cdot e^{-0.2\cdot t}$.
Geben Sie an, welche konkrete Bedeutung die Zahl 60 Millionen in diesem Funktionsterm hat.
Berechnen Sie den Zeitpunkt $t \geq 0$, an dem **60%** der Einwohner dieses Staates ein Handy besitzen, wobei angenommen wird, dass jeder Einwohner höchstens ein Handy hat.

$$\lim_{t \to \infty} \left(60\cdot 10^6 - 50\cdot 10^6\cdot e^{-\frac{2}{10}\cdot t}\right) \to 60000000$$

$\Rightarrow$ Interpretation: Der Markt ist bei ca. 60 Millionen gesättigt.

$$60\cdot 10^6 - 50\cdot 10^6\cdot e^{-0.2\cdot t} = 0.6\cdot 60\cdot 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad 54\cdot 10^6 - 0.6\cdot 60\cdot 10^6 = 50\cdot 10^6\cdot e^{-0.2\cdot t}$$

$$t_0 := \frac{24}{50} = e^{-0.2\cdot t} \text{ auflösen}, t \to 3.6698458754010021949 \qquad t_0 = 3.7$$

Nach etwa 3,7 Jahren haben 60% der Einwohner ein Handy.