Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1993
Mathematik 13 Technik - A I - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq IR$ die reelle Funktion f durch f:

$$f(x) := \arccos\left(\sqrt{\frac{2\cdot x - 1}{x^2}}\right).$$

Teilaufgabe 1.1 **(8 BE)**
Berechnen Sie D_f und bestimmen Sie die Nullstelle von f und das Verhalten von f(x) für $x \to \infty$.
[Teilergebnis: $D_f = [\ 0.5\ ;\ \infty\ [$]

$$-1 \le \sqrt{\frac{2\cdot x - 1}{x^2}} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \sqrt{\frac{2\cdot x - 1}{x^2}} \le 1 \quad \text{und } x \ne 0 \quad \Leftrightarrow$$

Quadrieren: $0 \le \dfrac{2\cdot x - 1}{x^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le 2\cdot x - 1 \le x^2$

Linke Seite: $0 \le 2\cdot x - 1$ auflösen, $x \to \dfrac{1}{2} \le x$

Rechte Seite: $2\cdot x - 1 \le x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2\cdot x + 1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \ge 0$

Definitionsmenge: $D_f = [\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \infty\ [$

Nullstellenbedingung: $\sqrt{\dfrac{2\cdot x - 1}{x^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2\cdot x - 1}{x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot x - 1 = x^2$

$$x^2 - 2\cdot x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 1$$

Argumentfunktion: $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{2\cdot x - 1}{x^2}} \to 0$ Da Zählergrad < Nennergrad

$$\lim_{x \to \infty} \arccos\left(\sqrt{\frac{2\cdot x - 1}{x^2}}\right) \to \frac{\pi}{2}$$

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)

Berechnen Sie f '(x) und bestimmen Sie das Verhalten von f '(x) für $x \to 0{,}5$ und $x \to 1$.

[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|\cdot x\cdot\sqrt{2\cdot x-1}}$]

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\cdot x-1}{x^2}\right)}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{2\cdot x-1}{x^2}}}\cdot\frac{x^2\cdot 2-(2\cdot x-1)\cdot 2\cdot x}{x^4} = \frac{x-1}{x^3\cdot\frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+1}\cdot\sqrt{2\cdot x-1}}{x^2}}$$

$$= \frac{x-1}{x\cdot|x-1|\cdot\sqrt{2\cdot x-1}}$$

$x-1>0$ auflösen, $x \rightarrow 1<x$ $\qquad f'_1(x) := \dfrac{1}{x\cdot\sqrt{2\cdot x-1}}$ $\qquad$ für $x>1$

$x-1<0$ auflösen, $x \rightarrow x<1$ $\qquad f'_2(x) := \dfrac{-1}{x\cdot\sqrt{2\cdot x-1}}$ $\qquad$ für $\frac{1}{2}<x<1$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\left(\frac{-1}{x\cdot\sqrt{2\cdot x-1}}\right) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-1}{x\cdot\sqrt{2\cdot x-1}}\right) \rightarrow -1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{-1}{x\cdot\sqrt{2\cdot x-1}}\right) \rightarrow -1$$

Teilaufgabe 1.3 (10 BE)
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten und die Extrempunkte des Graphen von f. Untersuchen Sie, ob der Graph von f Wendepunkte besitzt.

Vorzeichentabelle für f '(x):

		$x \neq \frac{1}{2}$	$x \neq 1$
Zähler	**n.d.**	**neg**	**pos**
Nenner	**n.d.**	**pos**	**pos**
f'(x)	**n.d.**	**neg**	**pos**
G_f		**smf**	**sms**

$f(1) = 0$

Tiefpunkt auf der Nahtstelle:
TP(1/0).

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Hochpunkt auf dem Rand:

Hochpunkt: **HP(** $\frac{1}{2}$ **/** $\frac{\pi}{2}$ **)**

für $x > 1$

$$f''_1(x) := \frac{d}{dx}f'_1(x) \rightarrow -\frac{1}{x^2\cdot\sqrt{2\cdot x-1}} - \frac{1}{x\cdot(2\cdot x-1)^{\frac{3}{2}}} \text{ vereinfachen } \rightarrow -\frac{3\cdot x-1}{x^2\cdot(2\cdot x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$f''_1(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot x - 1 = 0$ **auflösen**$, x \rightarrow \frac{1}{3}$ nicht definiert

für $\frac{1}{2} < x < 1$

$$f''_2(x) := \frac{d}{dx}f'_2(x) \rightarrow \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{2\cdot x-1}} + \frac{1}{x\cdot(2\cdot x-1)^{\frac{3}{2}}} \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{3\cdot x-1}{x^2\cdot(2\cdot x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$f''_2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot x - 1 = 0$ **auflösen**$, x \rightarrow \frac{1}{3}$ nicht definiert

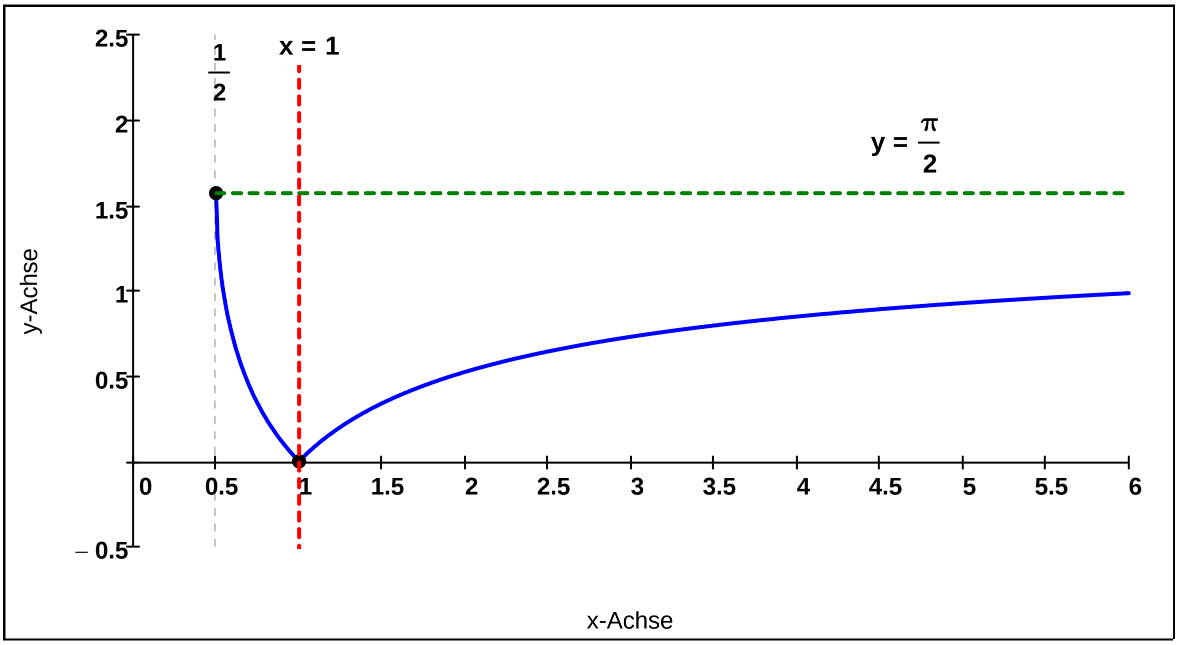
Vorzeichentabelle für f "(x):

		$x \neq \frac{1}{2}$	$x \neq 1$
Zähler	**n.d.**	**pos**	**neg**
Nenner	**n.d.**	**pos**	**pos**
f'(x)	**n.d.**	**pos**	**neg**
G_f		**lk**	**rk**

$f(1) \rightarrow 0$

Tiefpunkt auf der Nahtstelle:
TP(1/0) ist auch Wendepunkt.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Zeichnen Sie den Graphen von f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse sowie der Funktionswerte f(3) und f(6) für $x \le 6$ (1 LE = 2 cm).



Teilaufgabe 1.5 (5 BE)

Gegeben ist weiter die Integralfunktion $F(x) := \int_1^x f(t)\,dt$, $D_F = D_f$.

Geben Sie für den Graphen von F ohne weitere Rechnung, aber nur mit einer genauen Begründung das Monotonieverhalten sowie Art und Koordinaten eventueller Punkte mit horizontaler Tangente an.

Es gilt: $F'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$

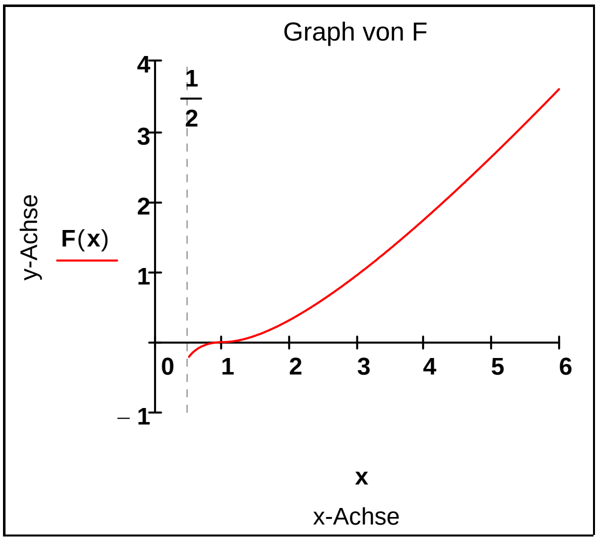
Die Nullstellen von f sind also die Extremstellen von F: G_F hat an der Stelle $x_0 = 1$ eine

waagrechte Tangente, ist jedoch streng monton steigend in $\left[\frac{1}{2};\infty\right[$.

$\Rightarrow$ G_F hat an der Stelle $x_0 = 1$ einen Terrassenpunkt.

$F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **TeP(1/0)**

In der Prüfung nicht verlangt:



Teilaufgabe 1.6 (6 BE)
Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) := 2\cdot\arctan\left(\sqrt{2\cdot x - 1}\right)$, $D_g = [\,1\,;\,\infty\,[$.
Zeigen Sie mit den Mitteln der Differentialrechnung, dass es ein C $\in$ IR gibt, sodass $f(x) = g(x) + C$ in D_g gilt, und bestimmen Sie C.

Ableitungsfunktion:

$$g'(x) := \frac{d}{dx}g(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt{2\cdot x - 1}}$$ zum Vergleich: $$f'_1(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt{2\cdot x - 1}}$$ für x > 1

$\Rightarrow$ $f(x) = g(x) + C$ (*)

Nun gilt (vgl. 1.1.): $f(1) = 0$ $g(1) = 2\cdot\arctan(1) = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Einsetzen in (*): $\frac{\pi}{2} + C = 0$ auflösen, $C \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\arccos\left(\sqrt{\frac{2\cdot x - 1}{x^2}}\right) = 2\cdot\arctan\left(\sqrt{2\cdot x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}$

Teilaufgabe 2 (8 BE)
Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y^2 \cdot x \cdot e^x \;;\; y(0) = 1 \;;\; x, y \in \mathbb{R},\; y > 0$$

mit maximalem Definitionsintervall.

Allgemeine DGL: $\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot x \cdot e^x$

Trennen der Variablen: $\frac{1}{y^2} \cdot dy = x \cdot e^x \cdot dx$

Integrieren: $\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int x \cdot e^x\, dx$

Rechte Seite: Partielles integrieren:

$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \qquad v(x) = e^x$

$\Leftrightarrow \qquad \frac{-1}{y} = x \cdot e^x - \int e^x\, dx$

$\Leftrightarrow \qquad \frac{-1}{y} = x \cdot e^x - e^x + k$

Allgemeine Lösung: $y_A(x, k) := \frac{1}{e^x - x \cdot e^x - k}$

Anfangsbedingung einsetzen: $y_A(0, k) = 1 \rightarrow -\frac{1}{k-1} = 1$ auflösen, $k \rightarrow 0$

Spezielle Lösung: $y_S(x) := y_A(x, 0) = \frac{1}{e^x - x \cdot e^x}$

$y > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - x \cdot e^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - x) \cdot e^x > 0$

$e^x > 0$ für alle x $\quad \Rightarrow \quad 1 - x > 0$ auflösen, $x \rightarrow x < 1$

Definitionsmenge: $D = \left]-\infty ; 1\right[$