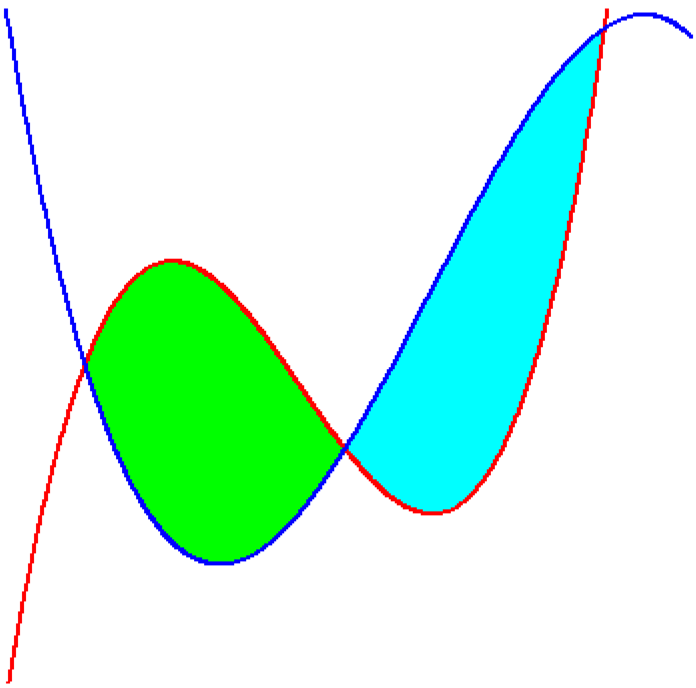
mathphys-online

INTEGRALRECHNUNG



Inhaltsverzeichnis

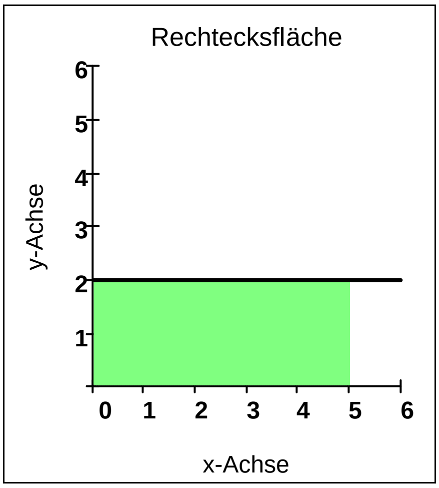
Graphiken erstellt mit Mathcad 15

Integralrechnung

1 Integration ganzrationaler Funktionen

1.1 Die Flächenmaßzahlfunktion

Beispiele: Bestimmung von elementaren Flächeninhalten



Funktionsterm: $f_1(x) = 2$;

Rechtecksfläche = Länge · Breite

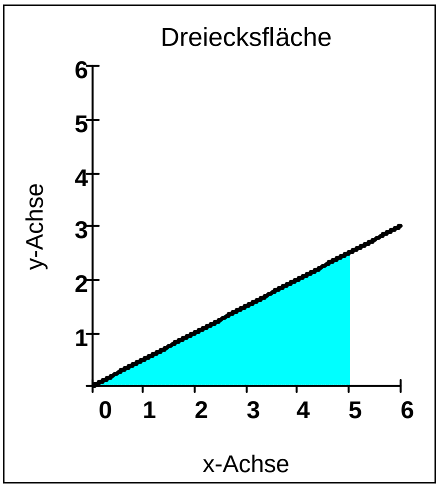
Flächenberechnung: $A_1 = 5 \cdot f(5) = 5 \cdot 2 = 10$ FE

Flächenmaßzahl: 10

Obere Grenze beliebig: $5 \hat{=} x$

Flächenmaßzahlfunktion:

$A_1(x) = x \cdot f(x) = x \cdot 2 = 2x$; $A_1'(x) = 2 = f_1(x)$



Funktionsterm: $f_2(x) = \frac{1}{2}x$;

Dreiecksfläche = 0,5 · Grundlinie · Höhe

Flächenberechnung:

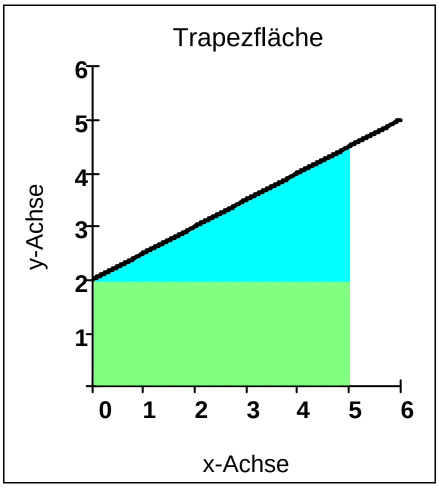
$A_2 = 0{,}5 \cdot 5 \cdot f(5) = 0{,}5 \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$ FE

Flächenmaßzahl: 6,25

Obere Grenze beliebig: $5 \hat{=} x$; $h \hat{=} f_2(x) = \frac{1}{2}x$

Flächenmaßzahlfunktion:

$A_2(x) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x^2$; $A_2'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}x$;



Funktionsterm: $f_3(x) = \frac{1}{2}x + 2$

Trapezfläche = Rechtecksfläche + Dreiecksfläche

Flächenberechnung: $A_3 = A_1 + A_2 = 16{,}25$ FE

Flächenmaßzahl: 16,5 FE

Flächenmaßzahlfunktion:

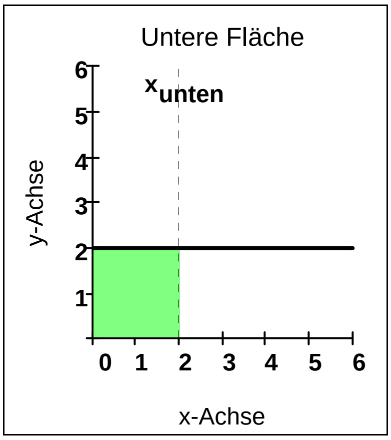
$A_3(x) = 2x + \frac{1}{4}x^2$; $A_3'(x) = 2 + \frac{1}{2}x = f_3(x)$;

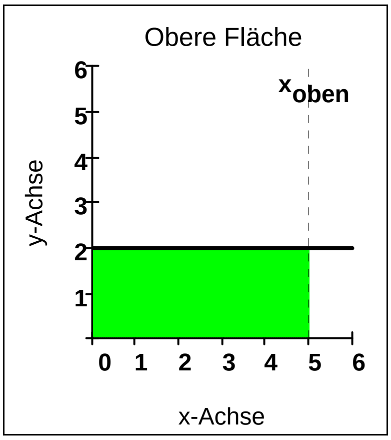
Ergebnis

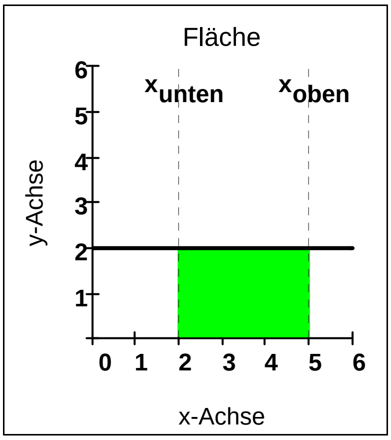
Alle Flächenmaßzahlen der Flächen unterhalb der Graphen im Intervall $[\,0;\,x\,]$ hängen eindeutig von der oberen Intervallgrenze ab: ***Flächenmaßzahlfunktion*** $A_i(x)$.

Mithilfe der Flächenmaßzahlfunktion können nun auch Flächen im Intervall $[\,x_{unten}\,;\,x_{oben}\,]$ berechnet werden.

Beispiele: Verschiebung der unteren Grenze





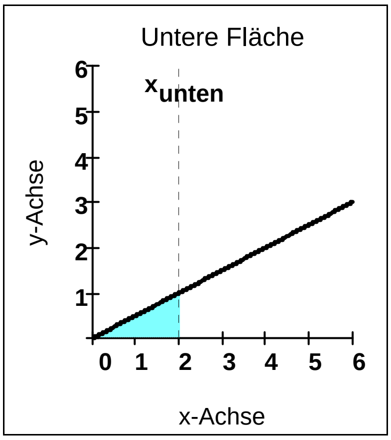


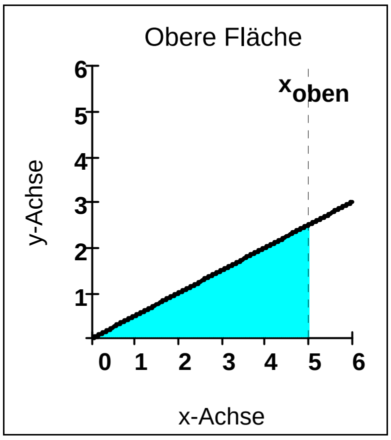
$$A_1(x_{unten}) = A_1(2) = 2\cdot 2 - 2\cdot 0 = 4$$

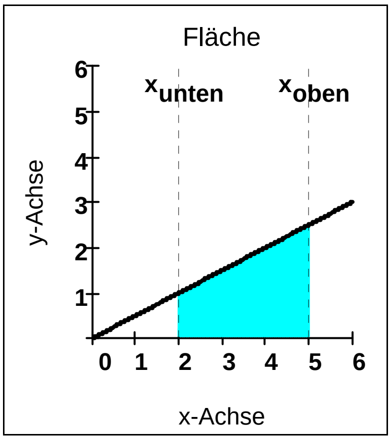
$$A_1(x_{oben}) = A_1(5) = 2\cdot 5 - 2\cdot 0 = 10$$

$$A_R(x) = A_1(x_{oben}) - A_1(x_{unten}) = 2\cdot 5 - 2\cdot 2 = 6$$

Schreibweise: $A_R(x) = A_1(x_{oben}) - A_1(x_{unten}) = [2x]_{x_{unten}}^{x_{oben}} = 2\cdot 5 - 2\cdot 2 = 6$





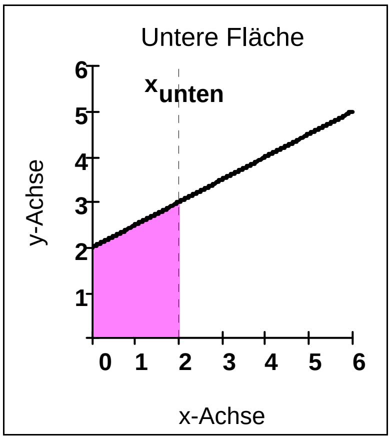


$$A_2(x_{unten}) = A_2(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^2 - \frac{1}{4}\cdot 0 = 1$$

$$A_2(x_{oben}) = A_2(5) = \frac{1}{4}\cdot 5^2 = 6{,}25$$

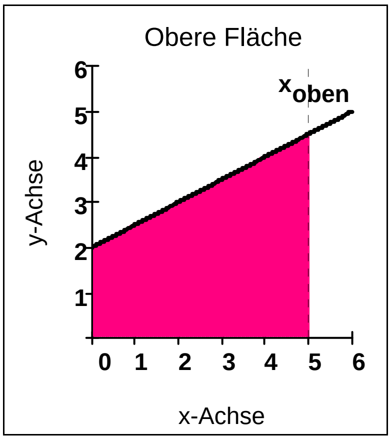
$$A_T(x) = A_3(x_{oben}) - A_3(x_{unten}) = \frac{1}{4}\cdot 5^2 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 = 6{,}25 - 1 = 5{,}25$$

Schreibweise: $A_T(x) = A_2(x_{oben}) - A_2(x_{unten}) = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{x_{unten}}^{x_{oben}} = \frac{1}{4}\cdot 5^2 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 = 5{,}25$



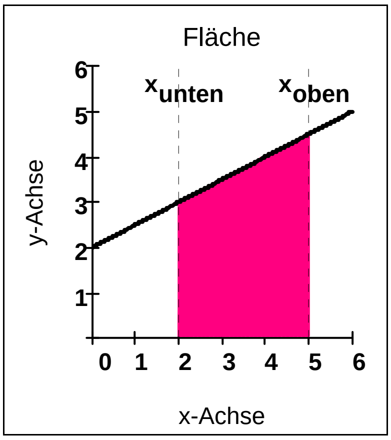
$A_2(x_{unten}) = A_2(2)$

$= 2\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 2^2 - 0 = 5$



$A_2(x_{oben}) = A_2(5)$

$= 2\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 5^2 = 16,25$



$A_T(x) = A_3(x_{oben}) - A_3(x_{unten})$

$= 16,25 - 5 = 11,25$

Schreibweise:

$$A_T(x) = A_3(x_{oben}) - A_3(x_{unten}) = \left[2x + \frac{1}{4}x^2\right] = \left(2\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 5^2\right) - \left(2\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 2^2\right) = 16,25 - 5 = 11,25$$

<u>Man sagt:</u>
Flächeninhalt des Flächenstücks unterhalb des Graphen G_f im Intervall $[1;\, 5]$.

<u>Es gilt:</u>
Gegeben sei eine auf $[a;\, b]$ definierte stetige Funktion f mit $f(x) \geq 0$. Dann existiert eine auf $[a;\, b]$ differenzierbare Flächenmaßzahlenfunktion A(x) mit der Eigenschaft

$$\boxed{A_i\,'(x) = f_i(x)}$$

1.2 Die Stammfunktion

Definition

Jede im Intervall $[\,a;\,b\,]$ differenzierbare Funktion F mit der Eigenschaft

$\boxed{F'(x) = f(x)}$ heißt ***Stammfunktion der Funktion f*** *in* $[\,a;\,b\,]$.

Satz

(1) Ist F Stammfunktion von f auf $[a;\,b]$, so heißt f **integrierbar** in diesem Intervall.

(2) Ist die Funktion $F(x)$ Stammfunktion von f auf $[a;b]$, so ist auch die Funktion $G(x) = F(x) + k \ \wedge \ k \in IR$ eine Stammfunktion, denn $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

Bezeichnungen

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f wird mit

$\int f(x)\,dx$ bezeichnet.

Man nennt $\int f(x)\,dx$ das ***unbestimmte Integral von f***.

$\int$ Integralzeichen, abgeleitet von Σ
f(x): Integrandenfunktion
x: Integrationsvariable

Satz

Potenzfunktionen vom Typ $f(x) = x^n$ sowie ganzrationale Funktionen besitzen Stammfunktionen.

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \wedge \quad n \neq -1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}}$$ (vgl. Merkhilfe Seite 7)

Integrationsregeln für unbestimmte Integrale

(1) Ein konstanter Faktor kann vor das Integral gezogen werden

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx \quad \text{für alle } c \in IR$$

(2) Das unbestimmte Integral einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der unbestimmten Integrale der Funktionen.

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

(3) Alle Stammfunktionen einer Funktion f unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k \ \wedge \ k \in IR$$

Beispiele

Bilden Sie jeweils die Menge der Stammfunktionen und zeichnen Sie einige Graphen.

a) $f_1(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$;

b) $f_2(x) = 3x^2 - x - 4$;

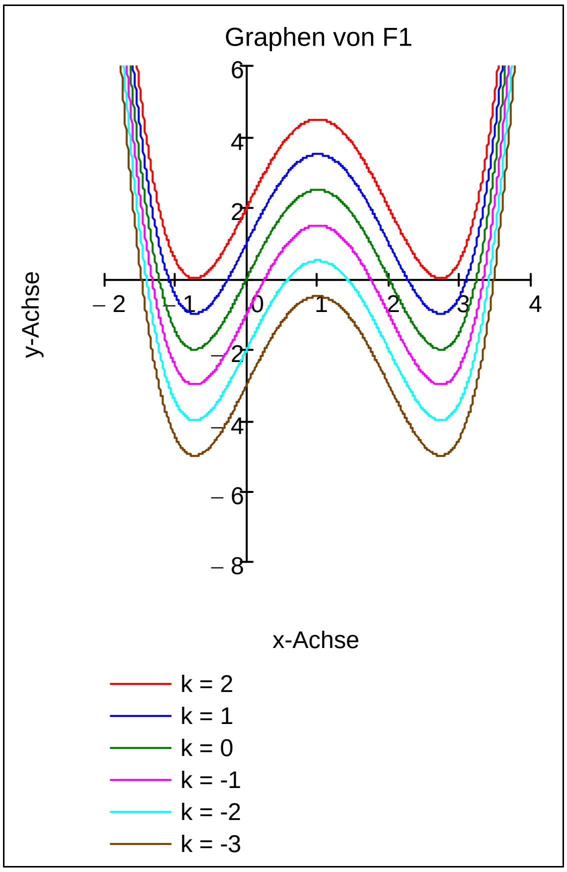
Lösung von a)

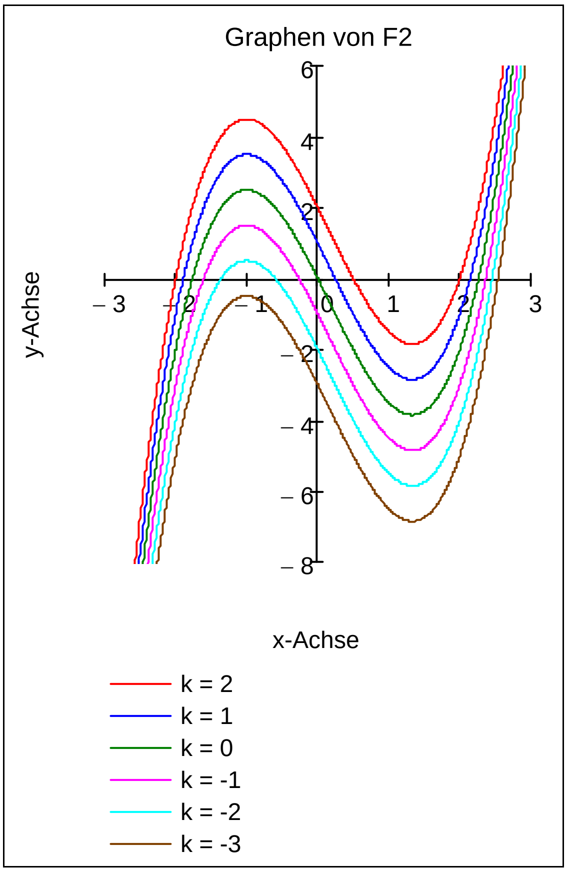
$$F_1(x) = \int \left(2x^3 - 6x^2 + 4\right) dx = 2 \cdot \int x^3\,dx - 6 \cdot \int x^2\,dx + 4 \cdot \int 1 dx$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{x^4}{4} + k_1\right) - 6 \cdot \left(\frac{x^3}{3} + k_2\right) + 4 \cdot (x + k_3) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x + k$$

Lösung von b)

$$F_2(x) = \int \left(3x^2 - x - 4\right) dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + k$$





Aufgabe

Welche Stammfunktion F_i der Funktion f_i hat die angegebene Eigenschaft?

a) $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 1$; G_F läuft durch den Punkt $A(1/2)$. [$k_1 = 2$]

b) $f_2(x) = 8x^3 - 6x^2 + 6x$; G_F hat im Tiefpunkt die waagrechte Tangente $y = -2$. [$k_2 = -2$]

c) $f_3(x) = -3x^2 - 3x + 18$; G_F hat im Hochpunkt die waagrechte Tangente $y = 11$. [$k_3 = -11$]

d) $f_4(x) = 6x^2 + 12x - 3$; G_F hat die Wendetangente $t_W(x) = -9x - 5$. [$k_4 = -3$]

Lösung zu a)

Stammfunktion: $F_1(x) = \int \left(3x^2 - 4x + 1\right) dx = x^3 - 2x^2 + x + k$

Bedingung einsetzen: $A \in G_{F_1} \quad \Rightarrow \quad F_1(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + k = 2 \quad \Rightarrow \quad k = 2$

Lösung zu b)

Stammfunktion: $F_2(x) = \int \left(8x^3 - 6x^2 + 6x\right) dx = 2x^4 - 2x^3 + 3x + k$

Extremstelle: $F_2\,'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) = 0$

Nullstellenbedingung: $8x^3 - 6x^2 + 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \cdot \left(4x^2 - 3x + 3\right) = 0$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad 4x^2 - 3x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4}$ keine weitere Lösung

Tiefpunkt $\left(0 / -2\right)$ einsetzen: $F_2(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad k = -2$

Lösung zu c)

Stammfunktion: $F_3(x) = \int \left(-3x^2 - 3x + 18\right) dx = -x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 18x + k$

Extremstelle: $F_3\,'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_3(x) = 0$

Nullstellenbedingung:
$-3x^2 - 3x + 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \cdot \left(x^2 + x - 6\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \cdot (x+3) \cdot (x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -3;\ x_2 = 2$

Art der Extremalstelle: $F_3\,'(x) = f_3\,'(x) = -6x - 3$;

$F_3\,'(-3) = -6(-3) - 3 = 15 \quad > 0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkt

$F_3\,'(2) = -6 \cdot 2 - 3 = -15 \quad > 0 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt

Hochpunkt $\left(2 / 11\right)$ einsetzen: $F_3(2) = 11 \quad \Rightarrow \quad -2^3 - \dfrac{3}{2} \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + k = 11 \quad \Rightarrow \quad k = -11$

Lösung zu d)

Stammfunktion: $F_4(x) = \int \left(6x^2 + 12x - 3\right) dx = 2x^3 + 6x^2 - 3x + k$

Wendestelle: $F_4\,''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_4\,'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_W = -1$

da Nullstelle mit VZW.

Wendepunkt liegt auf der Wendetangente: $y_W = t_W(-1) = -9 \cdot (-1) - 5 = 4$;

Wendepunkt $\left(-1 / 4\right)$ einsetzen:

$F_4(-1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + k = 4 \quad \Rightarrow \quad k = -3$

2 Flächenberechnungen

2.1 Fläche zwischen Graph der Funktion f und der x-Achse

Satz

Ist F Stammfunktion von f mit $f(x) \geq 0$ auf $[a; b]$, so lässt sich die Flächenmaßzahl A der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f im Intervall $[a; b]$ durch

$$A = F(b) - F(a)$$

bestimmen. Es wird eine ***bestimmte Integration*** durchgeführt.

Schreibweise: $\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$ vgl. Merkhilfe

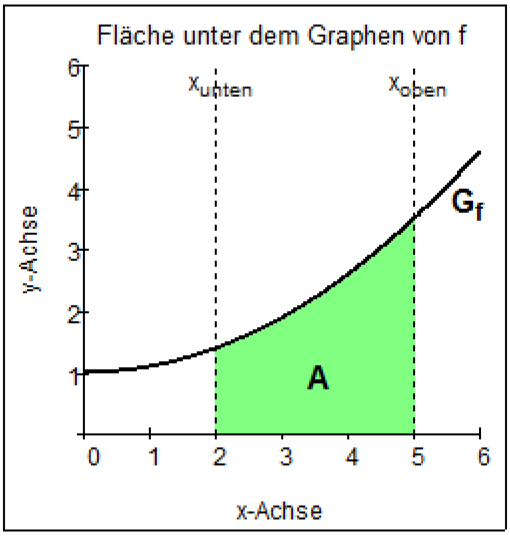
Sprechweise

Fläche mit dem Flächeninhalt A unter dem Graphen von f =
Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b =
obere Grenze minus untere Grenze

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + 1,\ x \in [\,0; +\infty\,[$.

Der Graph von f, die x-Achse und die Geraden $x = 2$ und $x = 5$ schließen ein Flächenstück ein. Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche A.



Fläche:

$$A = \int_{x_{unten}}^{x_{oben}} f(x)\,dx = \int_2^5 \left(\frac{1}{10}x^2 + 1\right) dx$$

Bestimmung der Stammfunktion und Einsetzen der Grenzen:

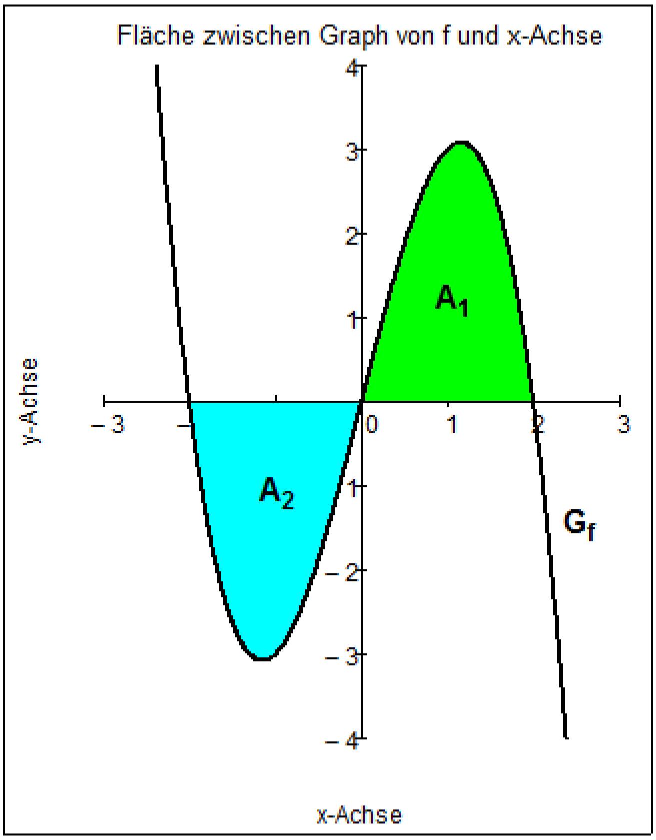
$$A = \left[\frac{1}{10} \cdot \frac{x^3}{3} + x\right]_2^5 = \left(\frac{25}{6} + 5\right) - \left(\frac{8}{30} + 2\right) = \frac{69}{10}$$

Der Flächeninhalt wird in Flächeneinheiten (FE) angegeben.

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 4x = -x \cdot (x+2) \cdot (x-2)$, $x \in IR$.

Der Graph von f und die x-Achse schließen ein Flächenstück ein.
Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche A.



Stammfunktion:

$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + k$;

Teilfläche 1 im Intervall $[0; 2]$ und $f(x) \geq 0$:

$$A_1 = \int_0^2 \left(-x^3 + 4x\right) dx = F(2) - F(0)$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 = -4 + 8 = 4 \text{ FE}$$

Teilfläche 1 im Intervall $[-2; 0]$ und $f(x) \leq 0$:

$$A_2{}^* = \int_{-2}^0 \left(-x^3 + 4x\right) dx = F(0) - F(-2)$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2\right) = 4 - 8 = -4$$

Wegen der Punksymmetrie von G_f müssen die Flächenmaßzahlen der beiden Teilflächen gleich sein:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow A_2 = \left| A_2^* \right| = 4 \text{ FE}$$

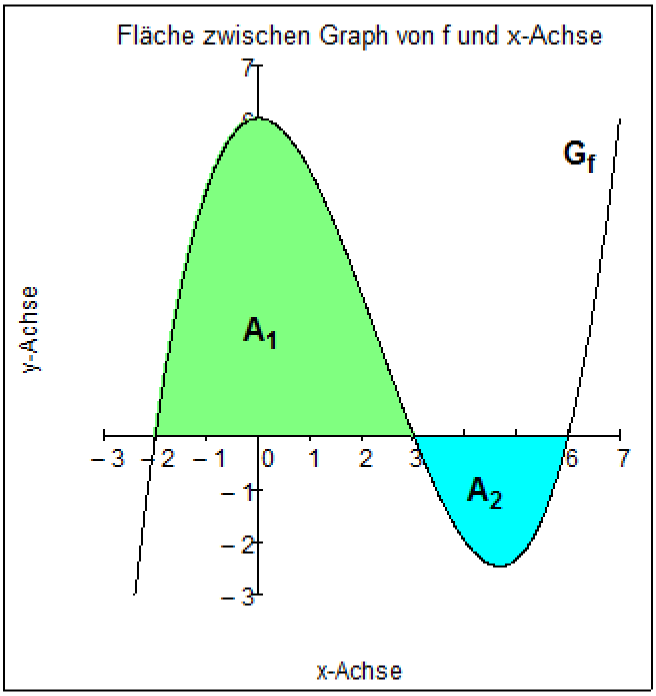
Ergebnis

Bei Flächen, die **unterhalb der x-Achse** liegen, ist der Wert der Integration **negativ**. Deshalb wird der **Betrag des Integrals** verwendet.

Beispiel 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(x^3 - 7x^2 + 36 \right) = \frac{1}{6} \cdot (x+2) \cdot (x-3) \cdot (x-6)$, $x \in IR$.

Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt.



Der Graph von f und die x-Achse schließen mehrere Flächenstücke ein, die oberhalb und unterhalb der x-Achse liegen.
Der Flächeninhalt der Gesamtfläche wird als Summe der Flächeninhalte der Teilflächen berechnet.

$$A_{ges} = A_1 + A_2$$

$$A_{ges} = \left| \int_{-2}^{3} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{3}^{6} f(x)\, dx \right|$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 36x \right) + k$$

Flächeninhalt 1. Teilfläche: $A_1 = \left| F(3) - F(-2) \right| = \left| \frac{87}{8} - \left(-\frac{74}{9} \right) \right| = \left| \frac{1375}{72} \right| = \frac{1375}{72}$

Flächeninhalt 2. Teilfläche: $A_2 = \left| F(6) - F(3) \right| = \left| 6 - \left(\frac{87}{8} \right) \right| = \left| -\frac{39}{8} \right| = \frac{39}{8}$

Flächeninhalt Gesamtfläche: $A_{ges} = A_1 + A_2 = \frac{1375}{72} + \frac{39}{8} = \frac{863}{36} \approx 24$

Merke

Der Flächeninhalt der Gesamtfläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse ist die Summe der Flächeninhalte der Einzelflächen, die sich jeweils zwischen zwei benachbarten Nullstellen x_1, x_2, …. **mit Vorzeichenwechsel** bilden lassen.

$$A_{ges} = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_3}^{x_4} f(x)dx \right| + \ldots + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \right|$$

Integrationsregeln für bestimmte Integrale

(1) Faktorregel: $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

(2) Summenregel: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(3) Intervalladditivität: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

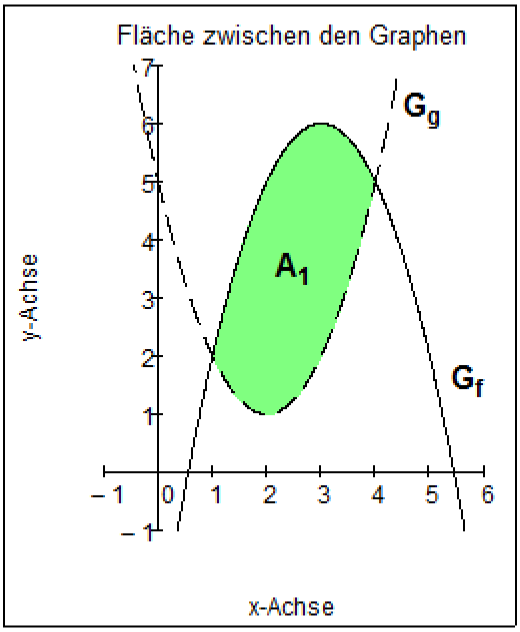
(4) Vertauschung der Integrationsgrenzen: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2.2 Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen

Beispiel 4

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 6x - 3$ und $g(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in IR$.

Die Graphen von f und g schließen ein Flächenstück ein.
Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche A_1.



Bestimmung der Schnittstellen:

$f \cap g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)$

$-x^2 + 6x - 3 = x^2 - 4x + 5$

In die Nullform bringen: $f(x) - g(x) = 0$

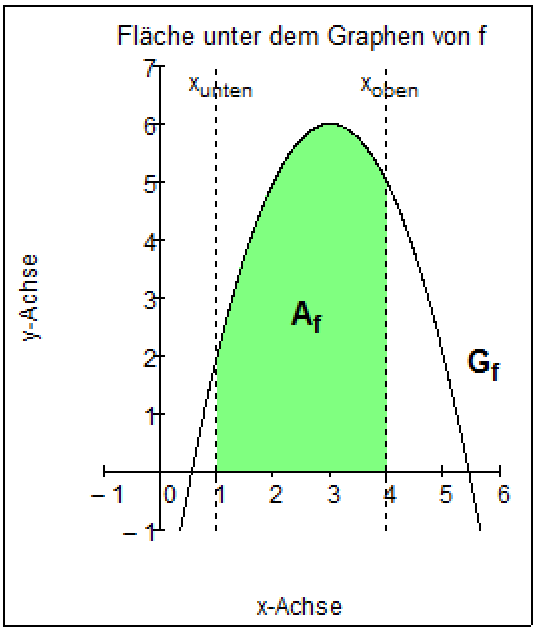
$-2x^2 + 10x - 8 = 0$

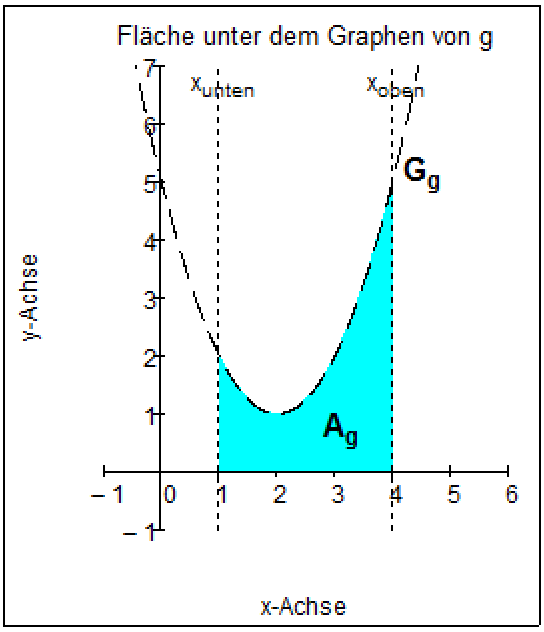
Lösungen bestimmen:

$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-10 \pm 6}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-10+6}{-4} = 1; \ x_2 = \frac{-10-6}{-4} = 4;$$

Im Folgenden werden die einzelnen Flächen unter den Graphen von f und von g über dem Intervall $[1; 4]$ durch Integration bestimmt. Die untere Grenze ist die Schnittstelle x_1, die obere Grenze die Schnittstelle x_2 mit $x_1 < x_2$





$$A_f = \int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 6x - 3\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 3x\right]_1^4$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1\right)$$

$$= 15$$

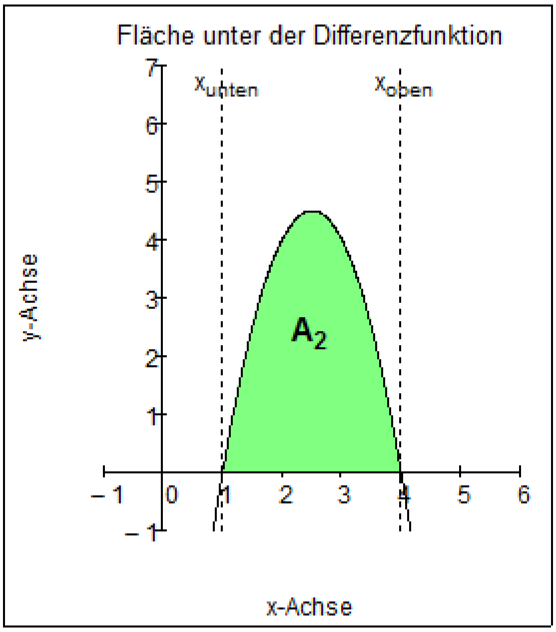
$$A_g = \int_1^4 g(x)\,dx = \int_1^4 \left(x^2 - 4x + 5\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_1^4$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1\right)$$

$$= 6$$

Differenz aus den Flächeninhalten der Teilflächen: $A_1 = A_f - A_g = 15 - 6 = 9$



Differenzfunktion:

$$k(x) = f(x) - g(x)$$

$$= \left(-x^2 + 6x - 3\right) - \left(x^2 - 4x + 5\right)$$

$$= -2x^2 + 10x - 8$$

Flächeninhalt unter dem Graphen von D:

$$A_2 = \int_1^4 \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_1^4 \left(-2x^2 + 10x - 8\right) dx$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + 5x^2 - 8x\right]_1^4$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 4^3}{3} + 5 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4\right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 5 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1\right)$$

$$= \left(\frac{16}{3}\right) - \left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9 \text{ FE}$$

Ergebnis

Flächenberechnung: $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,dx$

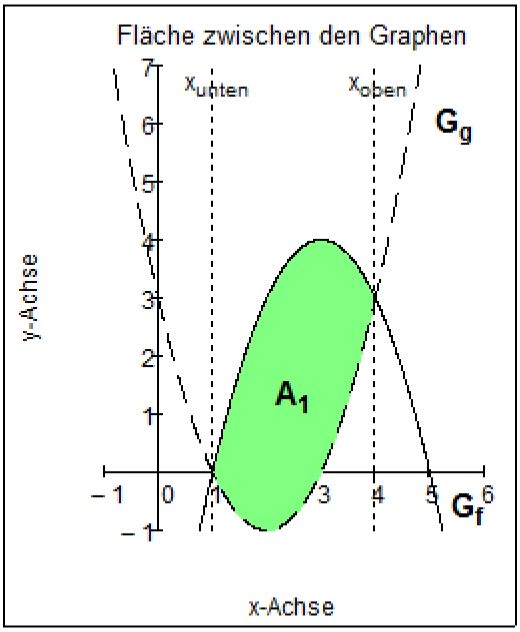
Merke
Die Fläche zwischen den Graphen zweier stetiger Funktionen f und g mit gleicher Definitionsmenge entspricht der Differenz der Flächen zwischen dem jeweiligen Graphen und der x-Achse. Die x-Werte der Schnittpunkte sind dabei die Integrationsgrenzen.
Um unabhängig von der Reihenfolge der Differenzbildung zu werden, wird zur Berechnung der Flächeninhalte der Betrag verwendet:

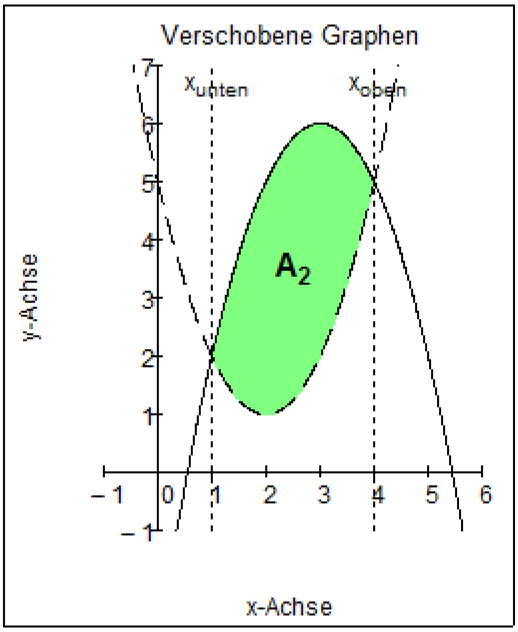
$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))\,dx \right|$$

Beispiel 5

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ und $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in IR$.

Die Graphen von f und g schließen ein Flächenstück ein.
Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche A_1.





Die Fläche zwischen den Graphen f und g bleibt gleich, wenn man beide Graphen z. B. um 2 LE nach oben verschiebt. Die Differenzfunktion ist in beiden Fällen identisch. Das heißt: Die Flächeninhalte der Flächen A_1 und A_2 stimmen überein. $A_1 = A_2$

Differenzfunktion:

$$k(x) = f(x) - g(x) = \left(-x^2 + 6x - 5\right) - \left(x^2 - 4x + 3\right) = -2x^2 + 10x - 8$$

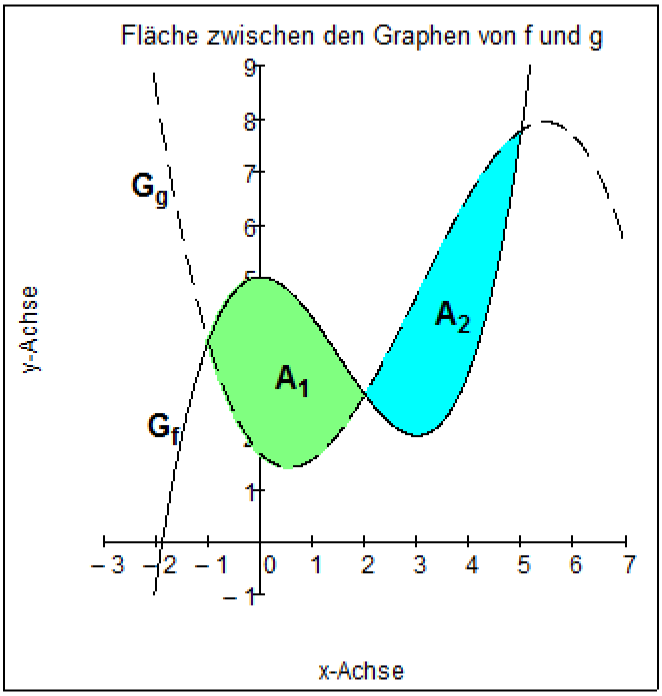
Die Differenzfunktion stimmt mit der Differenzfunktion aus Beispiel 4 überein.

Flächeninhalt: $A_1 = A_2 = 9$

Beispiel 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=\frac{2}{9}x^3-x^2+5$ und $g(x)=-\frac{1}{9}x^3+x^2-x+\frac{5}{3}$, $x\in IR$. Die Graphen von f und g schließen ein Flächenstück ein.

Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche $A_{ges}=A_1+A_2$.



Haben die beiden Graphen von f und g mehr als zwei Schnittpunkte, so hat die Differenzfunktion $k(x)=f(x)-g(x)$ mehr als zwei Nullstellen.

Das bedeutet:
Das **Vorzeichen der Differenzfunktion wechselt ständig**, da einmal der Graph von f über dem Graph von g liegt und im nächsten Intervall liegt umgekehrt der Graph von g über dem Graph von f.

Bestimmung der Schnittstellen:

$$f\cap g f(x)=g(x)\quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{9}x^3-x^2+5=-\frac{1}{9}x^3+x^2-x+\frac{5}{3}$$

In die Nullform bringen:

$$f(x)-g(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{3}x^3-2x^2+x+\frac{10}{3}=0$$

Lösungen der Gleichung 3. Grades bestimmen:

Durch Raten: $x_2=2$

Polynomdivision ohne Rest liefert: $p(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-4x-5\right)$;

Lösungen von $p(x)=0$: $x_1=-1$; $x_3=5$

Bestimmung der Flächenmaßzahlen:

$$A_{ges}=A_1+A_2=\left|\int_{-1}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{5}\left(f(x)-g(x)\right)\,dx\right|$$

Differenzfunktion:

$$k(x)=f(x)-g(x)\quad\Leftrightarrow\quad k(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x+\frac{10}{3}$$

Stammfunktion:

$$K(x) = \int k(x)\ dx = \int\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + \frac{10}{3}\right)dx = \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{10}{3}x + c$$

Flächeninhalt 1. Teilfläche:

$$A_1 = \left|\left[\frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{10x}{3}\right]_{-1}^{2}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{2^4}{12} - \frac{2\cdot 2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + \frac{10\cdot 2}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^4}{12} - \frac{2\cdot(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{10\cdot(-1)}{3}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{14}{3}\right) - \left(-\frac{25}{12}\right)\right| = \left|\frac{27}{4}\right| = \frac{27}{4}$$

Flächeninhalt 2. Teilfläche:

$$A_2 = \left|\left[\frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{10x}{3}\right]_{2}^{5}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{5^4}{12} - \frac{2\cdot 5^3}{3} + \frac{5^2}{2} + \frac{10\cdot 5}{3}\right) - \left(\frac{2^4}{12} - \frac{2\cdot 2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + \frac{10\cdot 2}{3}\right)\right|$$

$$= \left|\left(-\frac{25}{12}\right) - \left(\frac{14}{3}\right)\right| = \left|-\frac{27}{4}\right| = \frac{27}{4}$$

Flächeninhalt der gesamten Fläche:

$$A_{ges} = A_1 + A_2 = \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = \frac{27}{2}$$

<u>Merke</u>

Der Flächeninhalt der Gesamtfläche zwischen dem Graph von f und dem Graph von g ist die Summe der Flächeninhalte der Einzelflächen, die sich jeweils zwischen zwei benachbarten Schnittstellen x_1, x_2, …. bilden lassen.

$$A_{ges} = \left|\int_{x_1}^{x_2}\big(f(x) - g(x)\big)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3}\big(f(x) - g(x)\big)dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n}\big(f(x) - g(x)\big)dx\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\big(f(x) - g(x)\big)dx\right|$$

3 Stammfunktionen gebrochenrationaler Funktionen

Funktionstyp 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (ax+b)^n$, wobei $n \geq 0,\ a \in IR \setminus \{0\}$..

Dann gilt für die Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{a} \cdot (ax+b)^{n+1} + k$

Beispiel 1

a) $f(x) = (2x+5)^5$, $F(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+5)^6 + k = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+5)^6 + k$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x+5\right)^5$, $F(x) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x+5\right)^6 + k = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}x+5\right)^6 + k$

Funktionstyp 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{(ax+b)^n} = (ax+b)^{-n}$,

wobei $x \in IR \setminus \{0\},\ n \in IN \setminus \{1\},\ a \in IR \setminus \{0\}$.

Dann gilt für die Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{a} \cdot (ax+b)^{-n+1} + k = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{a}(ax+b)^{-(n-1)} + k = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + k$$

Beispiel 2

a) $f(x) = \frac{1}{(2x+5)^5} = (2x+5)^{-5}$,

$$F(x) = \frac{1}{-5+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+5)^{-5+1} + k = \frac{1}{-4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+5)^{-4} + k = \frac{-1}{8} \cdot \frac{1}{(2x+5)^4} + k$$

b) $f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+5\right)^5} = \left(\frac{1}{2}x+5\right)^{-5}$,

$$F(x) = \frac{1}{-5+1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x+5\right)^{-5+1} + k = \frac{2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2}x+5\right)^{-4} + k = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+5\right)^4} + k$$

Funktionstyp 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}$, wobei $x\in IR\setminus\{0\}$.

Dann gilt für die Stammfunktion: $F(x)=\ln(|x|)+k$

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{ax+b}$, wobei $x\in IR\setminus\{0\}$, $a\in IR\setminus\{0\}$.

Dann gilt für die Stammfunktion: $F(x)=\frac{1}{a}\cdot\ln(|ax+b|)+k$

<u>Beispiel 3</u>

a) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$, $F(x)=\int\frac{1}{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\ln(|2x+1|)+k$

b) $f(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}x+1}$, $F(x)=\int\frac{1}{\frac{1}{2}x+1}\,dx=2\cdot\ln\left(\left|\frac{1}{2}x+1\right|\right)+k$

Funktionstyp 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x}$, wobei $x\in IR\setminus\{0\}$.

Dann gilt für die Stammfunktion:

$$F(x)=\int\frac{ax^2+bx+c}{x}\,dx=\int\left(ax+b+\frac{c}{x}\right)dx=a\cdot\frac{x^2}{2}+bx+c\cdot\ln(|x|)+k$$

<u>Beispiel 4</u>

a) $f(x)=\frac{4x^2+2x+3}{x}$, $F(x)=\int\frac{4x^2+2x+3}{x}\,dx=\int\left(4x+2+\frac{3}{x}\right)dx=2x^2+2x+3\ln(|x|)+k$

b) $f(x)=\frac{4x^2+2x+3}{x^2}$, $F(x)=\int\frac{4x^2+2x+3}{x^2}\,dx=\int\left(4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx=4x+2\ln(|x|)-\frac{3}{x}+k$

Funktionstyp 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\dfrac{a\,x^2+b\,x+c}{x-1}$, wobei $x\in\mathrm{IR}\setminus\{1\}$, $a\in\mathrm{IR}\setminus\{0\}$; $b,c\in\mathrm{IR}$.

Dann gilt für die Stammfunktion:

$$F(x)=\int\frac{a\,x^2+b\,x+c}{x-1}\,dx=\int\left(a\,x+(a+b)+\frac{a+b+c}{x-1}\right)dx$$
$$=a\cdot\frac{x^2}{2}+(a+b)\,x+(a+b+c)\cdot\ln\left(|x-1|\right)+k$$

<u>Beispiel 5</u>

a) $f(x)=\dfrac{4\,x^2+2\,x+3}{x-1}$,

$$F(x)=\int\frac{4\,x^2+2\,x+3}{x-1}\,dx=\int\left(4\,x+6+\frac{9}{x-1}\right)dx=2\,x^2+6\,x+9\ln\left(|x-1|\right)+k$$

Funktionstyp 6

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\dfrac{v'(x)}{v(x)}$, wobei $v(x)\neq 0$.

Dann gilt für die Stammfunktion: $F(x)=\displaystyle\int\frac{v'(x)}{v(x)}\,dx=\ln\left(|v(x)|\right)+k$

<u>Beispiel 6</u>

a) $f(x)=\dfrac{2\,x+4}{x^2+4\,x+1}$, $F(x)=\displaystyle\int\frac{2\,x+4}{x^2+4\,x+1}\,dx=\ln\left(|x^2+4\,x+1|\right)+k$

b) $f(x)=\dfrac{3\,x+1}{3\,x^2+2\,x-1}$,

$$F(x)=\int\frac{3\,x+1}{3\,x^2+2\,x-1}\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{6\,x+2}{3\,x^2+2\,x-1}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(|3\,x^2+2\,x-1|\right)+k$$

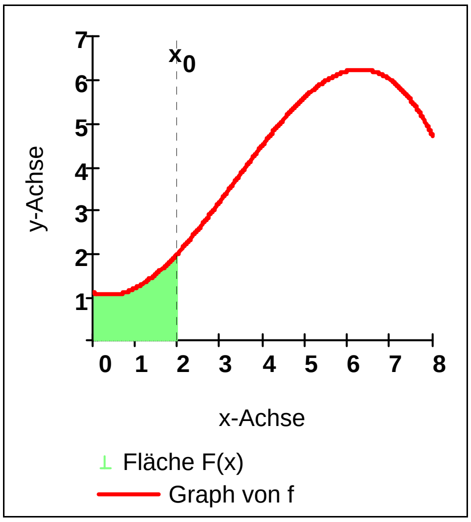
4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

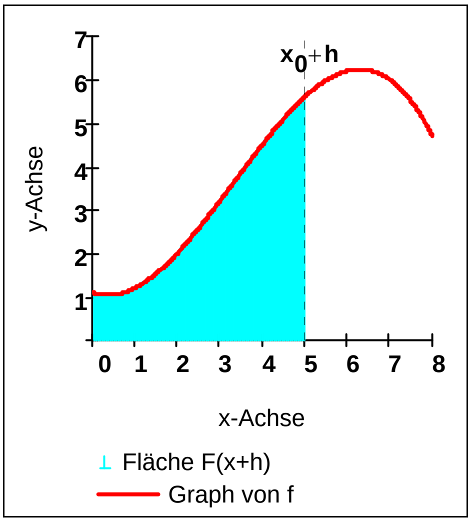
<u>Definition</u>

Gegeben ist eine auf dem Intervall $[\,a\,;\,b\,]$ stetige Funktion f. Dann heißt $J(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Integralfunktion von f mit der festen unteren Grenze a und der variablen oberen Grenze x.

Diese Funktion ordnet jedem x den Wert des bestimmten Integrals von f mit der festen unteren Grenze a und der variablen oberen Grenze x zu.





<u>Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</u>

f sei eine auf dem Intervall $[a;\,b]$ stetige Funktion. Dann ist jede Integralfunktion

Dann gilt:

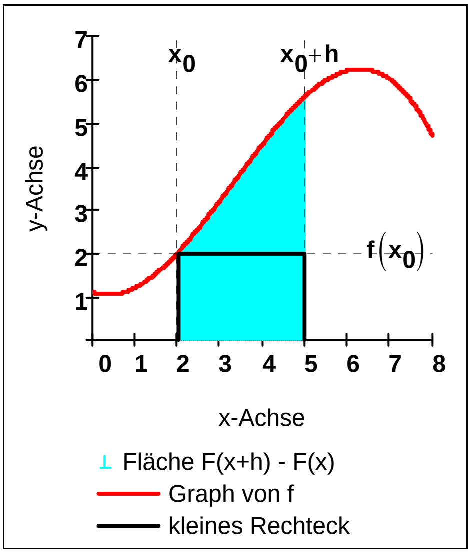
(1) $J'_a(x) = f(x)$ mit einer auf dem Intervall $[a;\,b]$ stetigen Funktion f.

(2) $J_a(x) = F(x) - F(a)$

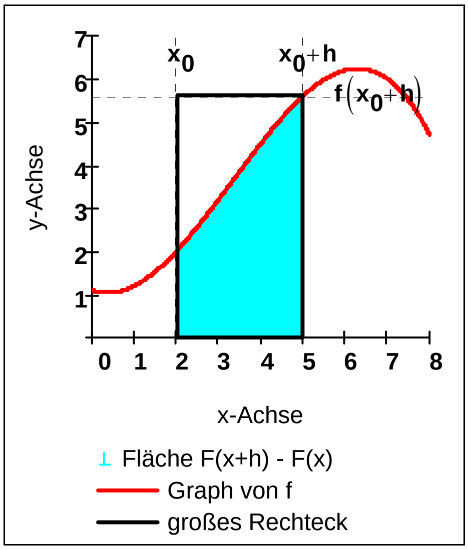
Das bedeutet:
Die Ableitung der Integralfunktion einer stetigen Integrandenfunktion ist die Integrandenfunktion selbst.
Das bedeutet, dass Differentiation und Integration umgekehrte Rechenoperationen sind oder dass sich Differentiation und Integration aufheben.

Beweis

Differenzfläche mit einbeschriebenem Rechteck



Differenzfläche mit einbeschriebenem Rechteck



Es gilt:
Für sehr kleine h-Werte ist der Flächeninhalt des kleinen Rechtecks kleiner oder gleich dem tatsächlichen Flächeninhalt unter dem Graphen von f, dieser ist kleiner oder gleich dem Flächeninhalt des großen Rechtecks.

Abschätzung: $f(x_0)\cdot h \le J_a(x_0+h) - J_a(x_0) \le f(x_0+h)\cdot h$

Geteilt durch $h>0$: $f(x_0) \le \dfrac{J_a(x_0+h)-J_a(x_0)}{h} \le f(x_0+h)$

Limesbetrachtung: $\lim\limits_{h\to 0}\left[\, f(x_0)\,\right] \le \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{J_a(x_0+h)-J_a(x_0)}{h} \right] \le \lim\limits_{h\to 0}\left[\, f(x_0+h)\,\right]$

$f(x_0) \le J'_a(x_0) \le f(x_0)$

Aus der Gleichheit von linker und rechter Seite folgt: $J'_a(x_0) = f(x_0)$

Für beliebiges $x \in [\, a\, ;\, b\,]$ gilt: $\boxed{J'_a(x) = f(x)}$

Aufgabe: Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2$ und $J(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen und den Extrempunkt von f.

b) Bestimmen Sie von F ohne Integration mit Hilfe der Aufgabe a) die Abszissenwerte der Extrempunkte und des Wendepunktes.

c) Berechnen Sie nun F durch Ausführen der Integration.

d) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und J.

e) Zeichnen Sie beide Graphen in ein kartesisches Koordinatensystem für $-1 \le x \le 11$.

f) Berechnen Sie das kleinere von beiden Graphen eingeschlossene Flächenstück.

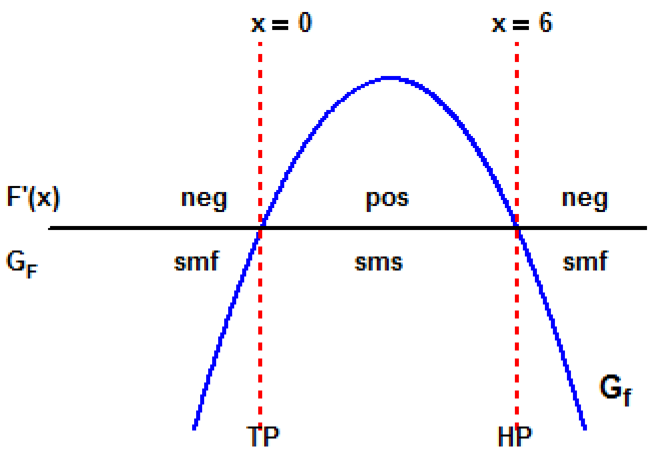
Lösung von a)

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{6}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \left(1 - \frac{1}{6}x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0;\ x_2 = 6;$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3}x;\ f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{3}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_S = 3;\ y_S = f(x_S) = 3 - \frac{1}{6}3^2 = \frac{3}{2}$$

Hochpunkt $HP\left(3 / \frac{3}{2}\right)$, da der Graph von f eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Lösung von b)



Tiefpunkt von J: $x_1 = 0$;

Hochpunkt von J: $x_2 = 6$;

Wendepunkt von F: $x_3 = 3$

Teilaufgabe c)

$$J(x) = \int_0^x \left(t - \frac{1}{6}t^2\right) dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{18}x^3$$

$J(0) = 0$; Tiefpunkt $TP(0/0)$

$J(6) = 6$; Hochpunkt $HP(6/6)$

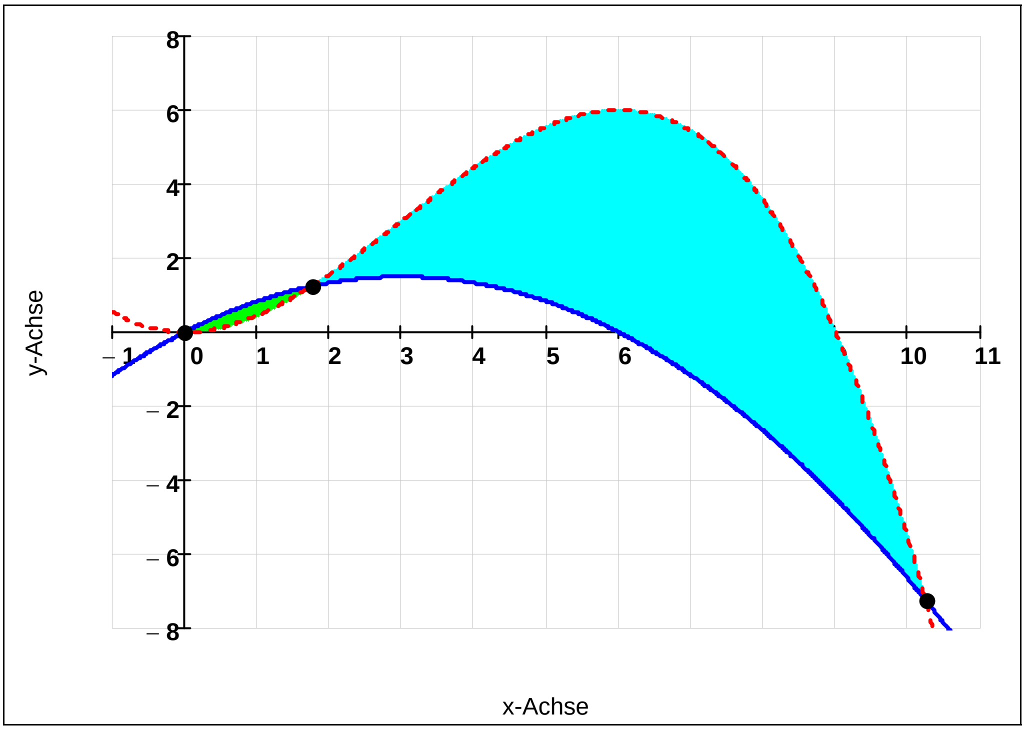
$J(3) = 3$; Wendepunkt $WP(3/3)$

Teilaufgabe d)

$$f(x) = J(x) \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{6}x^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{18}x^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{18}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) = 0$$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_2 = 6 - 3 \cdot \sqrt{2};\ x_2 = 6 + 3 \cdot \sqrt{2};$

Teilaufgabe e)



Teilaufgabe f)

$$A = \int_0^{6-3\cdot\sqrt{2}} \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x \right) dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{6-3\cdot\sqrt{2}} = 0,471$$

5 Vertiefung des Integralbegriffs

Die Integralrechnung hat das Ziel, den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächenstücke zu berechnen.
Bei der näherungsweisen Berechung der Flächen unter Polynomfunktionen durch Ober- und Untersummen treten Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen auf.

5.1 Potenzsummen

5.1.1 Die Summenformel von Gauß

Carl Friedrich Gauß (Deutscher Mathematiker, 1777 bis 1855) formulierte die folgende Formel für eine Potenzsumme: $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
Der Überlieferung nach soll Gauß die Aufgabe, die ersten 100 Zahlen zu addieren, bereits in der Grundschule gelöst haben.

Gauß überlegte sich folgendes:

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$$

Gauß schrieb die Summe auf und darunter nochmals in umgekehrter Reihenfolge:

1	2	3	3	5	...	95	96	97	98	99	100
100	99	98	97	96		6	5	4	3	2	1

Addiert man jeweils eine Spalte, so ergibt sich immer die Summe 101, insgesamt sind es 100 Spalten.

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{100} k = 100 \cdot 101 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Verallgemeinerung:

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{100} k = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Ohne Verknüpfungszeichen:

1	2	3	3	5	...	$n-5$	$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$		6	5	4	3	2	1

Addiert man jeweils eine Spalte, so ergibt sich immer die Summe $(n+1)$, insgesamt sind es n Spalten.

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = n \cdot (n+1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$ genannt ***der kleine Gauß***

Beweis durch Induktion

Vors.: Sei $n = 1$: Dann ist $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ richtig.

Induktionsannahme: Sei $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ist richtig für ein fest gewähltes n.

Schluss von n auf $n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n + (n+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + (n+1)$

Mit der Induktionsannahme gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 1}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

Schlussfolgerung:

Wenn die Formel für ein bestimmtes $n \in IN$ gilt, dann gilt sie auch für das nächste, also für $(n+1)$, für das übernächste, also $(n+2)$, usw.

5.1.2 Weitere Potenzsummen

Die Summenformeln folgender Potenzsummen können nicht so einfach wie beim *kleinen Gauß* gefunden werden.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + (n-1)^4 + n^4 = \frac{n \cdot (6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30}$$

Der Beweis erfolgt jeweils durch vollständige Induktion.

5.2 Die Streifenmethode

5.2.1 Das Riemann-Integral

Gegeben ist eine Funktion f mit dem Funktionsterm f(x), wobei $x \in [a;b]$.

Die gesuchte Fläche unter dem Graphen von f wird mithilfe von elementar zu berechnenden Flächeninhalten von Rechtecken angenähert: ***Streifenmethode***

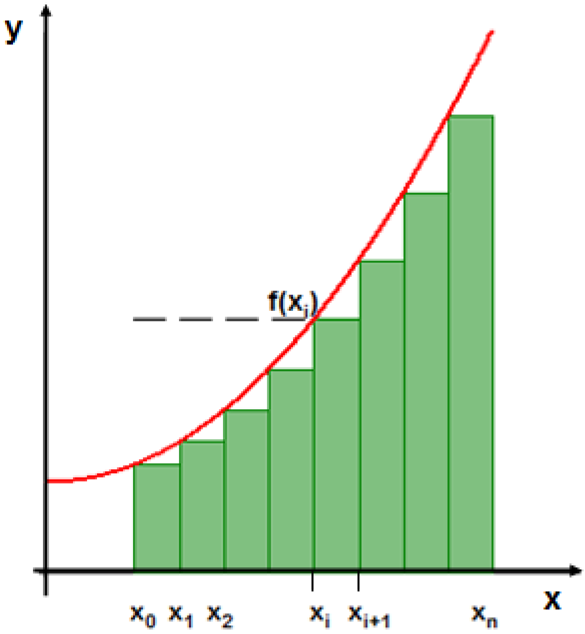
Hierfür wählt man ***einbeschriebene* Rechtecke *(Untersumme)*** und ***umbeschriebene Rechtecke (Obersumme)*** so, dass der Graph der Funktion f zwischen ihnen liegt.

Dazu wird das Intervall $[a;b]$ in n gleich große Teilintervalle zerlegt mit der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

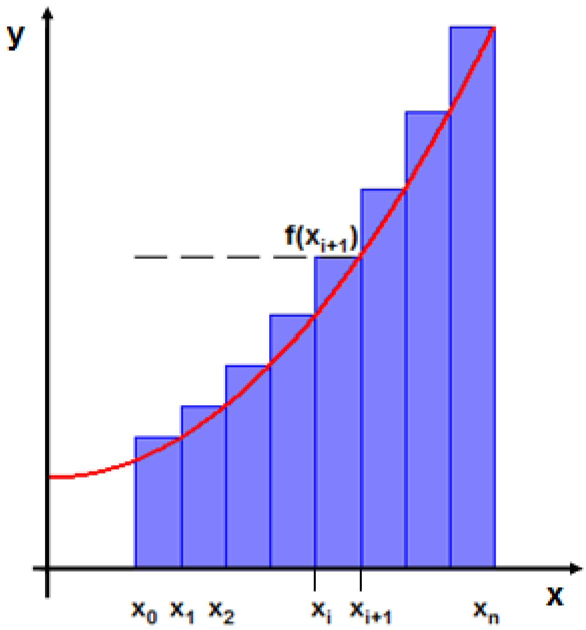
Teilpunkte der Zerlegung: $x_i = a + \Delta x \cdot i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$; $x_{i+1} = a + \Delta x \cdot (i+1) = a + \frac{b-a}{n} \cdot (i+1)$;

Bei einer im Intervall $[a;b]$ streng monoton steigenden Funktion f liegt der kleinste Funktionswert eines Teilintervalls jeweils am linken Rand und der größte Funktionswert eines Teilintervalls jeweils am rechten Rand.

Graph von f mit einbeschriebenen Rechtecken:



Graph von f mit umbeschriebenen Rechtecken:



Untersumme:

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right)$$

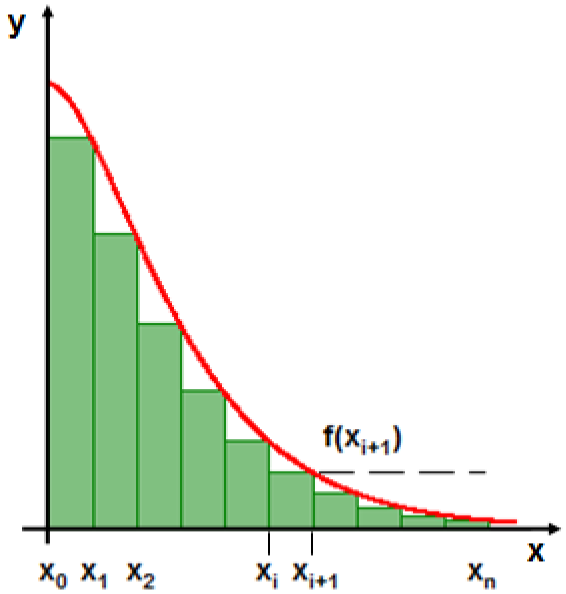
Obersumme:

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_{i+1})$$

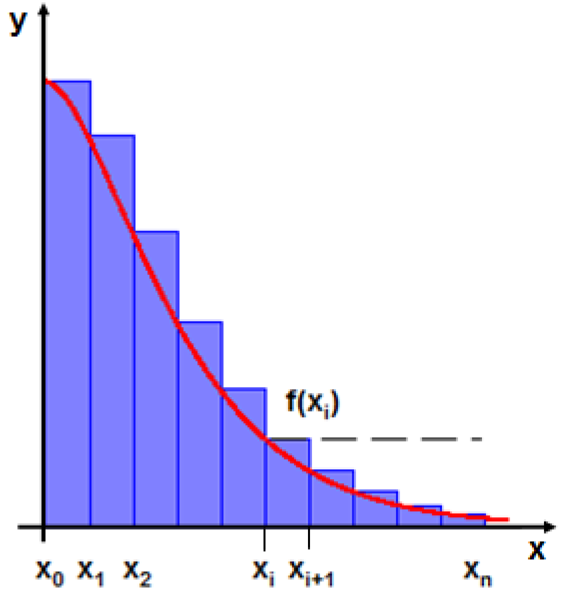
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot (i+1)\right)$$

Bei einer im Intervall $[\,a;\,b\,]$ streng monoton fallenden Funktion f liegt der kleinste Funktionswert eines Teilintervalls jeweils am rechten Rand und der größte Funktionswert eines Teilintervalls jeweils am linken Rand.

Graph von f mit einbeschriebenen Rechtecken:



Graph von f mit umbeschriebenen Rechtecken:



Untersumme:

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_{i+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot (i+1)\right)$$

Obersumme:

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right)$$

Durch schrittweises Erhöhen der Anzahl der Rechtecke erhält man eine immer genauere Annäherung der Fläche unter dem Graphen.

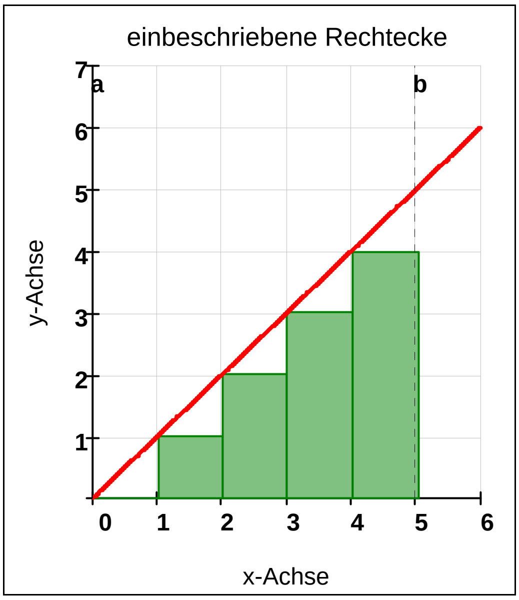
Die Berechnung der Grenzwerte von Obersumme bzw. Untersumme liefert einen gemeinsamen Grenzwert, der ***Riemann-Integral*** genannt wird.

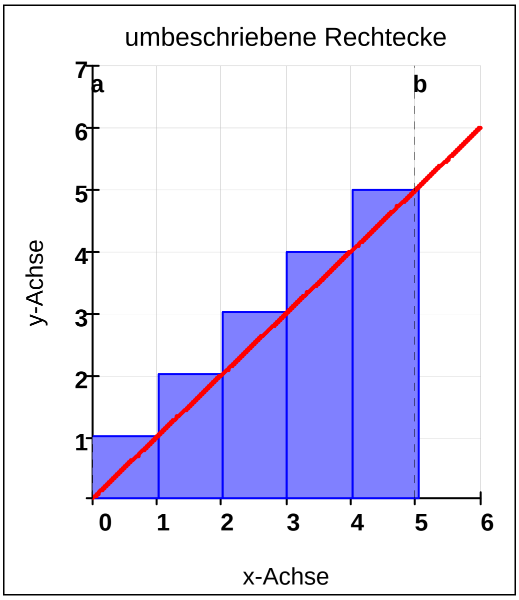
$$\lim_{n\to\infty} U_n = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} O_n$$

5.2.2 Fläche unter einer Geraden

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = x$ im Intervall $x \in [a;b]$.
Gesucht ist ein allgemeiner Term für die Untersumme und für die Obersumme.





- Jedes Teilintervall hat die Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Die Teilpunkte der Zerlegung lauten: $x_{i-1} = a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1)$; $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$;
- Da f im Intervall $[0 ; 5]$ streng monoton steigt, liegt der kleinste Funktionswert eines Teilintervalls jeweils am linken Rand, der größte am rechten Rand.

Untersumme für die Rechtecke: $S_U = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1)\right)$

Obersumme für die Rechtecke: $S_O = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right)$

Für a = 0 gilt:

$$S_U = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot f\left(\frac{b}{n} \cdot (i-1)\right) = \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n} \cdot 0 + \frac{b}{n} \cdot 1 + \frac{b}{n} \cdot 2 + \ldots \frac{b}{n} \cdot (n-2) + \frac{b}{n} \cdot (n-1)\right)$$

$$= \frac{b^2}{n^2} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1)) = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i$$

Wert der Potenzsumme: $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Einsetzen: $S_U = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{b^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

Für eine sehr feine Unterteilung: $\lim\limits_{n\to\infty} S_U = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{b^2}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] \to \frac{b^2}{2}$

$$S_O = \sum_{i=1}^{n}\frac{b}{n}\cdot f\left(\frac{b}{n}\cdot i\right) = \frac{b}{n}\cdot\left(\frac{b}{n}\cdot 1 + \frac{b}{n}\cdot 2 + \ldots \frac{b}{n}\cdot(n-1) + \frac{b}{n}\cdot n\right)$$

$$= \frac{b^2}{n^2}\cdot(1+2+3+\ldots+(n-1)+n) = \frac{b^2}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i$$

Wert der Potenzsumme: $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Einsetzen: $S_O = \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2} = \frac{b^2}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Für eine sehr feine Unterteilung: $\lim\limits_{n\to\infty} S_O = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{b^2}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \to \frac{b^2}{2}$

Speziell für b = 5: $S_U = \frac{b^2}{2} = \frac{25}{2}$; $S_O = \frac{b^2}{2} = \frac{25}{2}$;

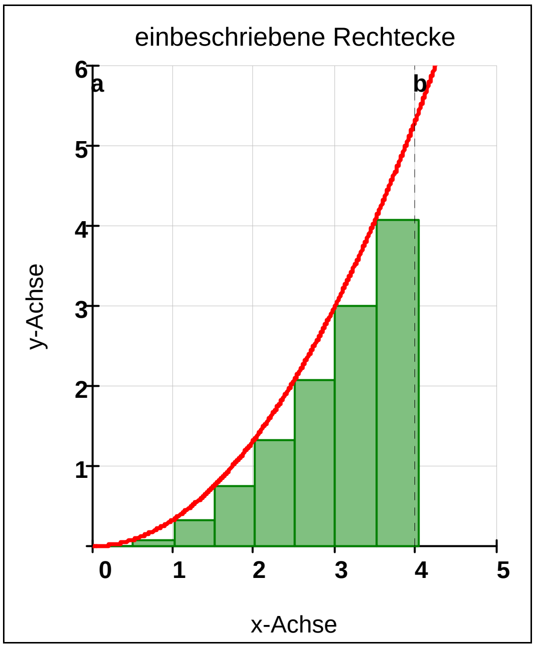
Zum Vergleich Berechnung der Dreiecksfläche direkt: $A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot f(5) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 = \frac{25}{2}$

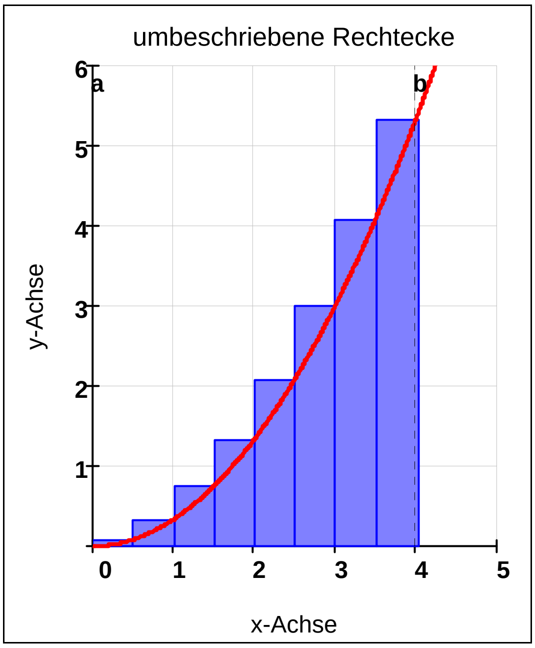
5.2.3 Fläche unter einem steigenden Graphen

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ im Intervall $x \in [a;b]$.

Gesucht ist ein allgemeiner Term für die Untersumme und für die Obersumme.





- Jedes Teilintervall hat die Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Die Teilpunkte der Zerlegung lauten: $x_{i-1} = a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1)$; $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$;
- Da f im Intervall $[\,0\,;\,4\,]$ streng monoton steigt, liegt der kleinste Funktionswert eines Teilintervalls jeweils am linken Rand, der größte am rechten Rand.

Untersumme für die Rechtecke: $S_U = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1)\right)$

Obersumme für die Rechtecke: $S_O = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right)$

Für a = 0 gilt:

$$S_U = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot f\left(\frac{b}{n} \cdot (i-1)\right) = \frac{b}{n \cdot 3} \cdot \left(\left(\frac{b}{n} \cdot 0\right)^2 + \left(\frac{b}{n} \cdot 1\right)^2 + \left(\frac{b}{n} \cdot 2\right)^2 + \ldots \left(\frac{b}{n} \cdot (n-2)\right)^2 + \left(\frac{b}{n} \cdot (n-1)\right)^2\right)$$

$$= \frac{b^3}{n^2 \cdot 3} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2\right) = \frac{b^3}{n^3 \cdot 3} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (i)^2$$

Wert der Potenzsumme: $\sum_{i=1}^{n-1} (i)^2 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6}$

Einsetzen: $S_U = \frac{b^3}{n^3 \cdot 3} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6} = \frac{b^3}{18} \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} = \frac{b^3}{18} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

Für eine sehr feine Unterteilung: $\lim\limits_{n \to \infty} S_U = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{b^3}{18} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] \to \frac{b^3}{9}$

$$S_O = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot f\left(\frac{b}{n} \cdot i\right) = \frac{b}{n \cdot 3} \cdot \left(\left(\frac{b}{n} \cdot 1\right)^2 + \left(\frac{b}{n} \cdot 2\right) + \ldots \left(\frac{b}{n} \cdot (n-1)\right)^2 + \left(\frac{b}{n} \cdot n\right)^2\right)$$

$$= \frac{b^3}{n^3 \cdot 3} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2\right) = \frac{b^3}{n^3 \cdot 3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i)^2$$

Wert der Potenzsumme: $\sum_{i=1}^{n} (i)^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Einsetzen: $S_O = \frac{b^3}{n^3 \cdot 3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{b^3}{18} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} = \frac{b^3}{18} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

Für eine sehr feine Unterteilung: $\lim\limits_{n \to \infty} S_O = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{b^3}{18} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] \to \frac{b^3}{9}$

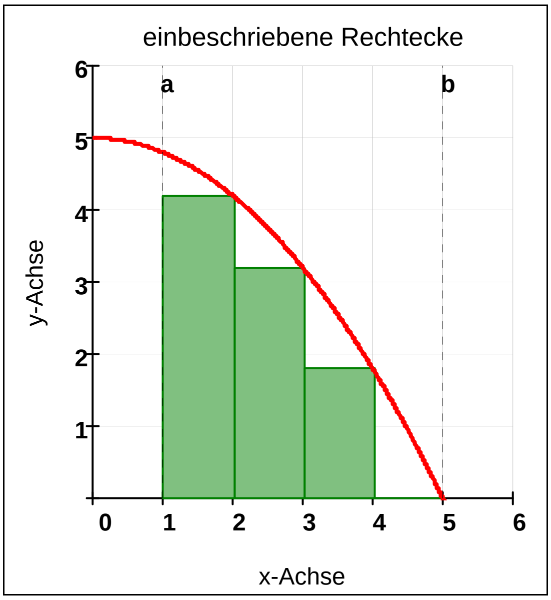
Speziell für b = 4: $S_U = \frac{b^3}{9} = \frac{4^3}{9} = \frac{64}{9}$; $S_O = \frac{b^3}{9} = \frac{4^3}{9} = \frac{64}{9}$;

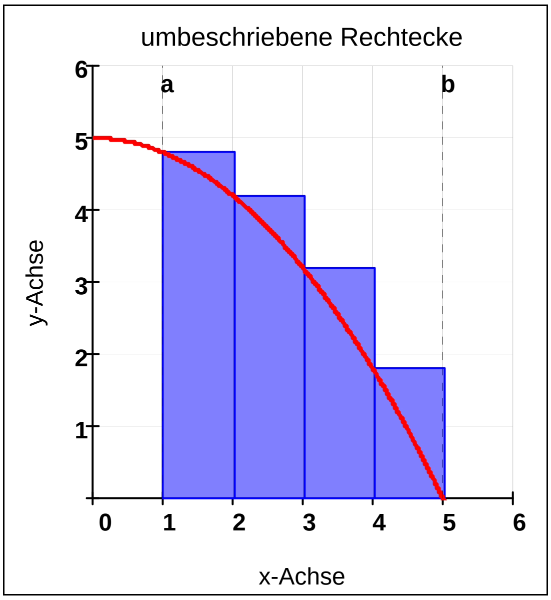
5.2.4 Fläche unter einem fallenden Graphen

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = 5 - \frac{1}{5}x^2$ im Intervall $x \in [1;\, 5]$.

Gesucht ist ein Term für die Untersumme und für die Obersumme bei einer Unterteilung von n = 4.





- Jedes Teilintervall hat die Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Die Teilpunkte der Zerlegung lauten: $x_{i-1} = a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1)$; $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$;
- Da f im Intervall $[\,0\,;\,5\,]$ streng monoton fällt, liegt der kleinste Funktionswert eines Teilintervalls jeweils am rechten Rand, der größte am linken Rand.

Untersumme für die Rechtecke: $S_U = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right)$

Obersumme für die Rechtecke: $S_O = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1)\right)$

Konkrete Werte:

$$S_U = \frac{5-4}{4} \cdot \{\, f(2) + f(3) + f(4) + f(5) \,\}$$

$$= 1 \cdot \left\{ \left(5 - \frac{1}{5}2^2\right) + \left(5 - \frac{1}{5}3^2\right) + \left(5 - \frac{1}{5}4^2\right) + \left(5 - \frac{1}{5}5^2\right) \right\} = 9{,}20$$

$$S_O = \frac{5-4}{4} \cdot \{\, f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \,\}$$

$$= 1 \cdot \left\{ \left(5 - \frac{1}{5}1^2\right) + \left(5 - \frac{1}{5}2^2\right) + \left(5 - \frac{1}{5}3^2\right) + \left(5 - \frac{1}{5}4^2\right) \right\} = 14$$

6 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz

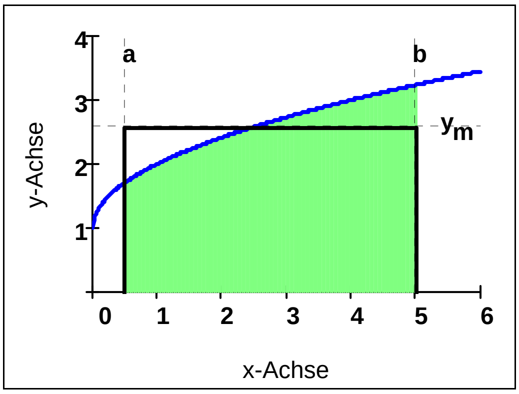
Gegeben ist eine stetige Funktion f mit $x \in [a;\, b]$. Die Funktion sei integrierbar und es gelte entweder $f(x) \geq 0$ oder $f(x) \leq 0$.
Über die Berechnung der Fläche A zwischen dem Graphen von f und der x-Achse lässt sich der Mittelwert der Funktionswerte y_m der Funktion f im Intervall $x \in [a;\, b]$ berechnen. Es gilt:

$$\boxed{y_m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx}$$

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x) = 1 + \sqrt{x} \quad \wedge \quad x \geq 0$.



Für die Fläche unter dem Graphen von f gilt:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

Auf dem Intervall $[a;\, b]$ lässt sich ein Rechteck mit gleichem Flächeninhalt errichten.
Die Höhe h entspricht dabei dem Mittelwert y_m der Funktionswerte:

$A = (b-a) \cdot h = (b-a) \cdot y_m$

Gleichsetzen und auflösen:

$$(b-a) \cdot y_m = \int_a^b f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad y_m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Beispiel 2

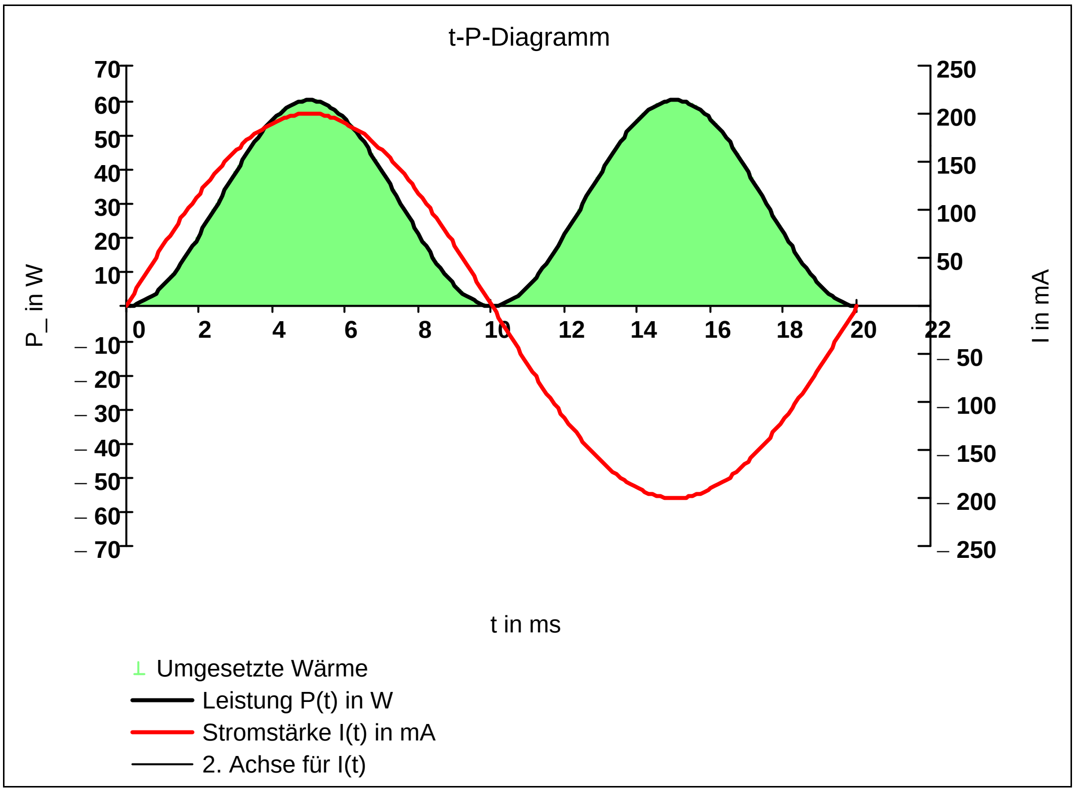
Ein Wechselstrom hat dann die effektive Stromstärke I_{eff}, wenn er in einem Stromkreis die gleiche Wärmeleistung erzeugt wie ein Gleichstrom der Stärke $I = I_{eff}$.

Ein stromdurchflossener ohmscher Widerstand $R = 1500\,\Omega$ gibt die mittlere Wärmeleistung $\overline{P}$ ab.
Gegeben ist die Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ mit $U_0 = 300\,V$; $f = 50\,Hz$.
Also gilt: $U(t) = 300\,V \cdot \sin(100\,\pi\,Hz \cdot t)$
Stromstärke I und Spannung U haben die gleiche Phasenlage, das heißt für die Stromstärke $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$.

Amplitude berechnet über das ohmsche Gesetz:

$$R = \frac{U_0}{I_0} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{300\,V}{1500\,\Omega} = 0{,}200\,A = 200\,mA\,;\ I(t) = 200\,mA \cdot \sin(100\,\pi\,Hz \cdot t)$$

Leistung: $P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t) = P_0 \cdot (\sin(\omega t))^2$



Periodendauer: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50\,\text{Hz}} = 0{,}020\,\text{s} = 20\,\text{ms}$

Mittlere Leistung:

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P(t)\;dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P_0 \cdot (\sin(\omega t))^2\;dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P_0 \cdot (\sin(\omega t))^2\;dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{P_0}{2} \cdot (1 - \cos(2\omega t))\;dt$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{P_0}{2} \cdot \left[t - \frac{1}{2\omega} \cdot \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{1}{T} \cdot \frac{P_0}{2} \cdot \left\{ T - \frac{1}{2\omega} \cdot \sin(2\omega T) + \frac{1}{2\omega} \cdot \sin(0) \right\} = \frac{P_0}{2}$$

Konkret: $\overline{P} = \frac{P_0}{2} = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} = \frac{300\,\text{V} \cdot 0{,}200\,\text{A}}{2} = 30\,\text{W}$.

Das entspricht dem Mittelwert der Leistungsamplitude.

$$\overline{P} = R \cdot I_{eff}^{\;2} \quad \Rightarrow \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{\overline{P}}{R}} = \sqrt{\frac{30\,\text{W}}{1500\,\Omega}} = \sqrt{\frac{30\,\text{V} \cdot \text{A}}{1500\,\frac{\text{V}}{\text{A}}}} = 141\,\text{mA}$$

$$\overline{P} = U_{eff} \cdot I_{eff} \quad \Rightarrow \quad U_{eff} = \frac{\overline{P}}{I_{eff}} = \frac{30\,\text{V} \cdot \text{A}}{0{,}141\,\text{A}} = 212\,\text{V}$$