

Trigonometrische Funktionen

- Berechnungen an zusammengesetzten Sinusfunktionen
- Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, besondere Funktionswerte, Flächenberechnung

ORIGIN := 1

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$ und $x \in [0; 4 \cdot \pi]$.

- Bestimmen Sie die Amplitude und die Periodenlänge im Vergleich zur Sinuskurve und berechnen Sie alle Nullstellen.
- Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen und die Wendestellen.
- Zeichnen Sie den Graphen G_f .
- Bestimmen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert $y_1 := 1$ beträgt.
- Bestimmen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert $y_2 := -\sqrt{3}$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Maßzahl der Fläche zwischen zwei benachbarten Nullstellen und der x-Achse.

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $f(x) := 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$

Amplitude: $a := 2$ Frequenz: $b := \frac{1}{2}$ Periodenlänge: $p := \frac{2 \cdot \pi}{b} = 4 \cdot \pi$

Nullstellen: $\sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = 0$ $x_0(k) := \frac{1}{2} \cdot x = k \cdot \pi$ auflösen, $x \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Konkrete Nullstellen: $k := 0..2$

$$x_0(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \pi \\ 4 \cdot \pi \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe b)

1. Ableitungsfunktion: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2. Ableitungsfunktion: $f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x) = -\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2}$

3. Ableitungsfunktion: $f'''(x) := \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4}$

Extremstellen:

Horizontale Tangenten:

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Nullstellen von cos: $x_E(k) := \frac{x}{2} = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ auflösen, $x \rightarrow \pi + 2 \cdot \pi \cdot k$

Art der Extremstellen:

$k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$f''(x_E(k)) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$	$x_E(k) = \begin{pmatrix} \pi \\ 3 \cdot \pi \\ 5 \cdot \pi \end{pmatrix}$	Hochpunkt Tiefpunkt Hochpunkt
---	---	--	-------------------------------------

$y_E(k) := \overrightarrow{f(x_E(k))} \rightarrow 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right)$ Beachte: $W = [-2; 2]$

Wendestellen:

$$f''(x) = 0 \rightarrow -\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2} = 0$$

Nullstellen von sin: $x_W(k) := \frac{1}{2} \cdot x = k \cdot \pi$ auflösen, $x \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Wendestellen:

$k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$f'''(x_W(k)) = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.25 \\ -0.25 \end{pmatrix}$	Wendepkt. existiert Wendepkt. existiert Wendepkt. existiert	$x_W(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \pi \\ 4 \cdot \pi \end{pmatrix}$
---	---	---	--

Teilaufgabe c)

Nullstellen im Intervall $[0; 4 \cdot \pi]$:

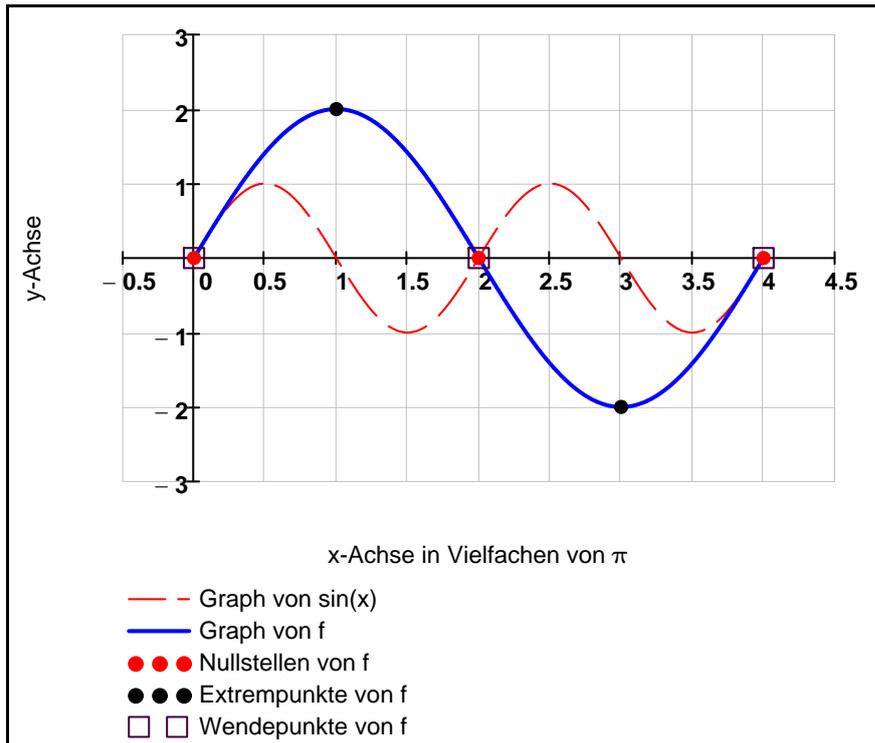
$$L_N = \{ 0; 2 \cdot \pi; 4 \cdot \pi \}$$

Extremstellen im Intervall $[0; 4 \cdot \pi]$:

$$L_E = \{ \pi; 3 \cdot \pi \}$$

Wendestellen im Intervall $[0; 4 \cdot \pi]$:

$$L_W = \{ 0; 2 \cdot \pi; 4 \cdot \pi \}$$



Nullstellen:

$$x_0(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \pi \\ 4 \cdot \pi \end{pmatrix}$$

Extremstellen:

$$x_E(k) = \begin{pmatrix} \pi \\ 3 \cdot \pi \\ 5 \cdot \pi \end{pmatrix}$$

Wendestellen:

$$x_W(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \pi \\ 4 \cdot \pi \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe d)

$$2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = \frac{1}{2}$$

Im 1. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_1 = \frac{\pi}{6}$ auflösen, $x_1 \rightarrow \frac{\pi}{3}$ $x_{11} := \frac{\pi}{3}$

Im 2. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_2 = \pi - \frac{\pi}{6}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{5 \cdot \pi}{3}$ $x_{12} := \frac{5 \cdot \pi}{3}$

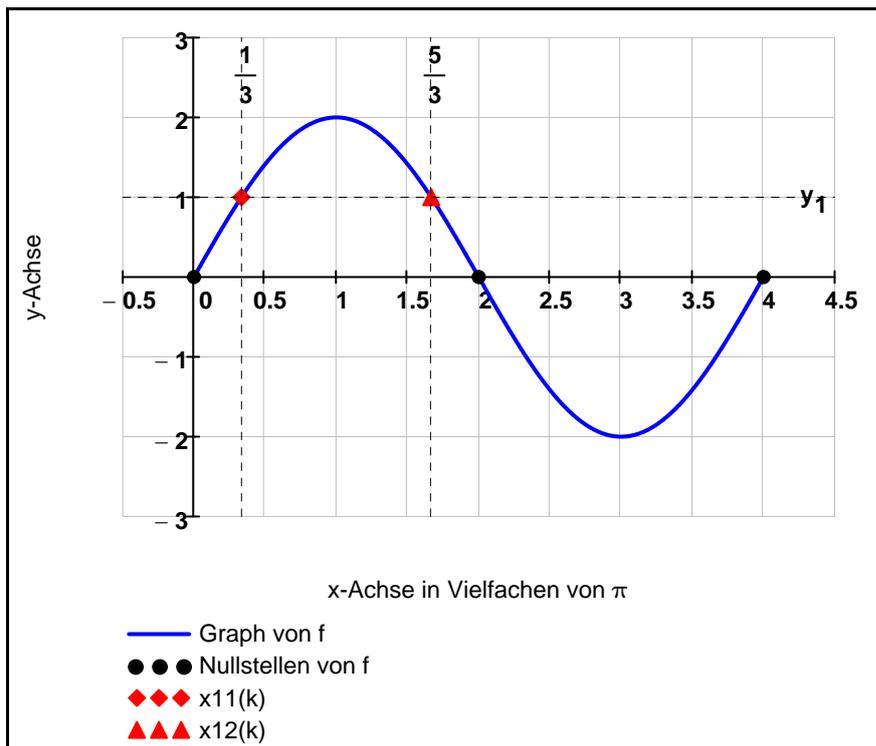
Weitere Lösungen: $k := 0..2$ Periodenlänge. $p = 4 \cdot \pi = 12.566$

$$x_{11}(k) := x_{11} + k \cdot p$$

$$x_{12}(k) := x_{12} + k \cdot p$$

$$x_{11}(0) = \frac{\pi}{3}$$

$$x_{12}(0) = \frac{5 \cdot \pi}{3}$$



Lösungen:

$$y_1 = 1$$

$$\frac{x_{11}(0)}{\pi} = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$\frac{x_{12}(0)}{\pi} = \frac{5}{3} = 1.667$$

Teilaufgabe e)

$$2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Im 3. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_2 = \frac{4 \cdot \pi}{3}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{8 \cdot \pi}{3}$ $x_{21} := \frac{8 \cdot \pi}{3}$

Im 4. Quadranten: $\frac{1}{2} \cdot x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{3}$ auflösen, $x_2 \rightarrow \frac{10 \cdot \pi}{3}$ $x_{22} := \frac{10 \cdot \pi}{3}$

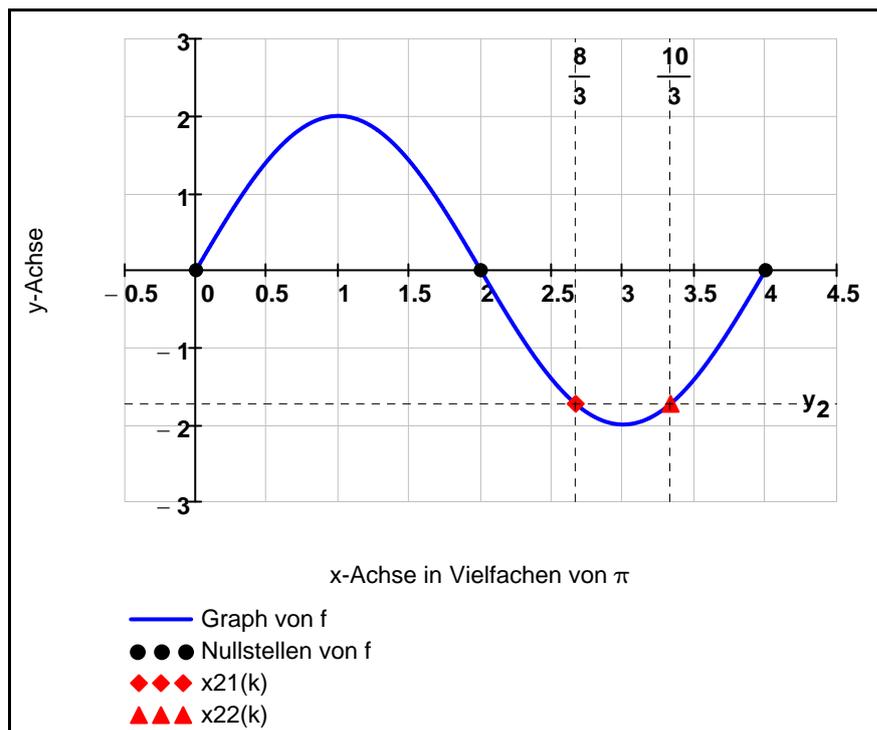
Weitere Lösungen: $k := 0..2$ Periodenlänge. $p = 4 \cdot \pi = 12.566$

$$x_{21}(k) := x_{21} + k \cdot p$$

$$x_{22}(k) := x_{22} + k \cdot p$$

$$x_{21}(0) = \frac{8 \cdot \pi}{3}$$

$$x_{22}(0) = \frac{10 \cdot \pi}{3}$$



Lösungen:

$$y_2 = -\sqrt{3} = -1.732$$

$$\frac{x_{21}(0)}{\pi} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\frac{x_{22}(0)}{\pi} = \frac{10}{3} = 3.33$$

Teilaufgabe f)

Stammfunktion:

$$F(x, K) := \int 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) dx + K \qquad F(x, K) = K - 4 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Flächenberechnung:

$$A := \int_0^{2 \cdot \pi} 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) dx \qquad A = 8$$

