Trigonometrische Funktionen

- Berechnungen an zusammengesetzten Sinusfunktionen
- Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, besondere Funktionswerte
- Flächenberechnung

ORIGIN := **1**

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\cdot\sin\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$ und $x \in [0;\ 2\cdot\pi]$.

a) Bestimmen Sie die Amplitude und die Periodenlänge im Vergleich zur Sinuskurve und berechnen Sie alle Nullstellen.
b) Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen und die Wendestellen.
c) Zeichnen Sie den Graphen G_f .
d) Bestimmen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert $y_1 := 1$ beträgt.
e) Bestimmen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert $y_2 := -\sqrt{2}$ beträgt.
f) Bestimmen Sie die Maßzahl der Fläche zwischen zwei benachbarten Nullstellen und der x-Achse.

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $f(x) := 2\cdot\sin\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$

Amplitude: $a := 2$ Periodenlänge: $p := \frac{2\cdot\pi}{3}$ Phase: $\varphi := \frac{\pi}{6}$ nach rechts

Nullstellen: $\sin\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ $x_0(k) := 3\cdot x - \frac{\pi}{2} = k\cdot\pi \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\pi\cdot k}{3}$ mit $k \in Z$

Konkrete Nullstellen: $k0 := 0 .. 5$

$$x_0(k0) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\cdot\pi}{6} \\ \frac{7\cdot\pi}{6} \\ \frac{3\cdot\pi}{2} \\ \frac{11\cdot\pi}{6} \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe b)

1. Ableitungsfunktion: $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) \;=\; 6\cdot\cos\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$

2. Ableitungsfunktion: $f''(x) := \frac{d}{dx}f'(x) \;=\; -18\cdot\sin\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$

3. Ableitungsfunktion: $f'''(x) := \frac{d}{dx}f''(x) \;=\; -54\cdot\cos\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$

Extremstellen:

Horizontale Tangenten:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6\cdot\cos\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Nullstellen von cos: $x_E(k) := 3\cdot x - \frac{\pi}{2} = (2\cdot k + 1)\cdot\frac{\pi}{2} \text{ auflösen}, x \;\rightarrow\; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi\cdot k}{3}$

Art der Extremstellen: $k1 := -1..5$

$$k1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad f''(x_E(k1)) = \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 18 \\ -18 \\ 18 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad x_E(k1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{2\cdot\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{4\cdot\pi}{3} \\ \frac{5\cdot\pi}{3} \\ 2\cdot\pi \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Tiefpunkt} \\ \text{Hochpunkt} \\ \text{Tiefpunkt} \\ \text{Hochpunkt} \\ \text{Tiefpunkt} \\ \text{Hochpunkt} \\ \text{Tiefpunkt} \end{array}$$

$y_E(k) := \overrightarrow{f(x_E(k))} \rightarrow 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\cdot k\right)$ Beachte: $W = [\,-2\,;\;2\,]$

Wendestellen:

$$f''(x) = 0 \rightarrow -18\cdot\sin\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Nullstellen von sin: $x_W(k) := 3\cdot x - \frac{\pi}{2} = k\cdot\pi \text{ auflösen}, x \;\rightarrow\; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi\cdot k}{3}$ mit $k \in Z$

Existenz der Wendestellen: $\quad k2 := 0..5$

$$k2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad x_W(k2) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\cdot\pi}{6} \\ \frac{7\cdot\pi}{6} \\ \frac{3\cdot\pi}{2} \\ \frac{11\cdot\pi}{6} \end{pmatrix} \qquad f'''\left(x_W(k2)\right) = \begin{pmatrix} -54 \\ 54 \\ -54 \\ 54 \\ -54 \\ 54 \end{pmatrix}$$

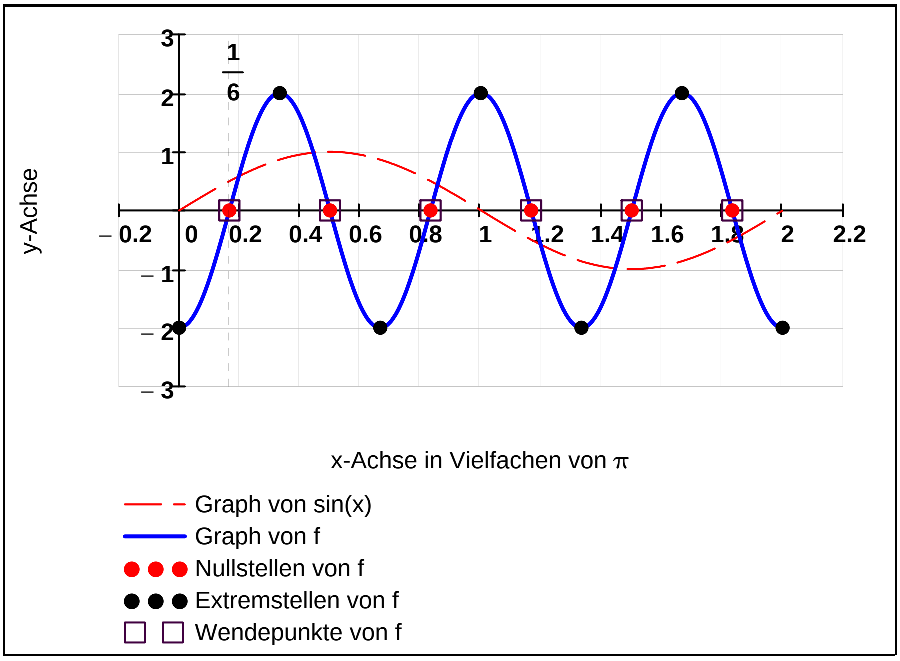
Wendepkt. existiert
Wendepkt. existiert
Wendepkt. existiert
Wendepkt. existiert
Wendepkt. existiert
Wendepkt. existiert

Teilaufgabe c)

Nullstellen im Intervall $[\,0;\ 2\cdot\pi\,]$: $\quad L_N = \left\{ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{5\cdot\pi}{6};\ \frac{7\cdot\pi}{6};\ \frac{3\cdot\pi}{2};\ \frac{11\cdot\pi}{6} \right\}$

Extremstellen im Intervall $[\,0;\ 2\cdot\pi\,]$: $\quad L_E = \left\{ 0;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \pi;\ \frac{4\cdot\pi}{3};\ \frac{5\cdot\pi}{3};\ 2\cdot\pi \right\}$

Wendestellen im Intervall $[\,0;\ 2\cdot\pi\,]$: $\quad L_W = \left\{ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{5\cdot\pi}{6};\ \frac{7\cdot\pi}{6};\ \frac{3\cdot\pi}{2};\ \frac{11\cdot\pi}{6} \right\}$



Nullstellen:

$\frac{x_0(k0)}{\pi} =$

0.17
0.5
0.83
1.17
1.5
1.83

Teilaufgabe d)

$$2 \cdot \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin\left(3 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

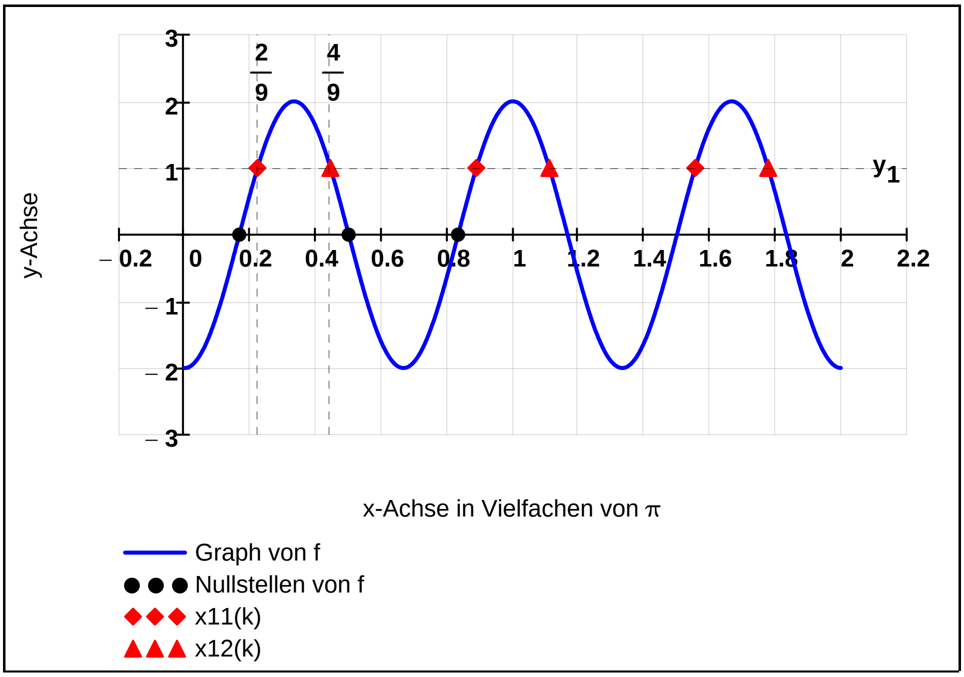
Im 1. Quadranten: $3 \cdot x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ auflösen, x $\rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{9}$ $\qquad x_{11} := \frac{2 \cdot \pi}{9}$

Im 2. Quadranten: $3 \cdot x - \frac{\pi}{2} = \frac{5 \cdot \pi}{6}$ auflösen, x $\rightarrow \frac{4 \cdot \pi}{9}$ $\qquad x_{12} := \frac{4 \cdot \pi}{9}$

Weitere Lösungen: $k := 0..2$ Periodenlänge. $p = \frac{2 \cdot \pi}{3} = 2.094$

$$x_{11}(k) := x_{11} + k \cdot p \qquad x_{12}(k) := x_{12} + k \cdot p$$

$$x_{11}(k) = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \pi}{9} \\ \frac{8 \cdot \pi}{9} \\ \frac{14 \cdot \pi}{9} \end{pmatrix} \qquad x_{12}(k) = \begin{pmatrix} \frac{4 \cdot \pi}{9} \\ \frac{10 \cdot \pi}{9} \\ \frac{16 \cdot \pi}{9} \end{pmatrix}$$



Lösungen:

$y_1 = 1$

$\frac{x_{12}(k)}{\pi} =$

0.44
1.11
1.78

$\frac{x_{11}(k)}{\pi} =$

0.22
0.89
1.56

Teilaufgabe e)

$$2\cdot\sin\left(3\cdot x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sin\left(3\cdot x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$$

Im 3. Quadranten: $3\cdot x-\frac{\pi}{2}=\frac{5\cdot\pi}{4}$ auflösen, $x \rightarrow \frac{7\cdot\pi}{12}$ $\quad x_{21}:=\frac{7\cdot\pi}{12}$

Im 4. Quadranten: $3\cdot x-\frac{\pi}{2}=\frac{7\cdot\pi}{4}$ auflösen, $x \rightarrow \frac{3\cdot\pi}{4}$ $\quad x_{22}:=\frac{3\cdot\pi}{4}$

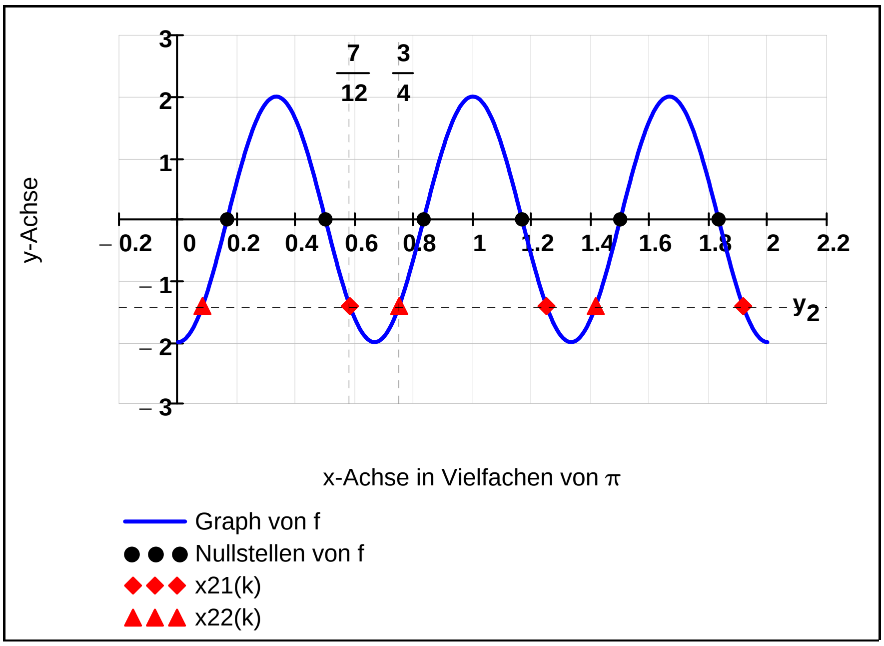
Weitere Lösungen: Periodenlänge. $p=\frac{2\cdot\pi}{3}=2.094$

$k1 := 0..2$ $\qquad k2 := -1..1$

$x_{21}(k) := x_{21}+k\cdot p$ $\qquad x_{22}(k) := x_{22}+k\cdot p$

$$x_{21}(k1)=\begin{pmatrix}\frac{7\cdot\pi}{12}\\ \frac{5\cdot\pi}{4}\\ \frac{23\cdot\pi}{12}\end{pmatrix} \qquad x_{22}(k2)=\begin{pmatrix}\frac{\pi}{12}\\ \frac{3\cdot\pi}{4}\\ \frac{17\cdot\pi}{12}\end{pmatrix}$$

Für die Nullstellen: $k := 0..5$



$y_2=-\sqrt{2}=-1.4$

Lösungen:

$\frac{x_{21}(k1)}{\pi}=$

0.58
1.25
1.92

$\frac{x_{22}(k2)}{\pi}=$

0.08
0.75
1.42

Teilaufgabe f)

Stammfunktion:

$$F(x,K) := \int 2\cdot\sin\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right)dx + K \qquad F(x,K) = K - \frac{2\cdot\cos\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right)}{3}$$

Flächenberechnung:

$$A := \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot\sin\left(3\cdot x - \frac{\pi}{2}\right)dx \qquad A = \frac{4}{3} = 1.333$$