

Trigonometrische Funktionen

- Prüfungsaufgaben



Aufgabe 1: aus der Abschlussprüfung 1998 / AI

Gegeben ist die Funktionen $g_{a,b}(x) = a \cdot \cos(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in der von a und b unabhängigen Definitionsmenge und $D = \mathbb{R}$.

- a) Bestimmen Sie die Werte a und b so, dass der Graph von $g_{a,b}$ durch den Punkt $W(0|-2)$ verläuft und die kleinste, positive Nullstelle der zugehörigen Funktion $g_{a,b}$ mit der Nullstelle

$$\text{von } p(x) := \frac{3}{4} \cdot x^2 - 3 \text{ übereinstimmt. (3 BE)}$$

$$[\text{Mögliches Ergebnis: } a = -2; b = \frac{1}{4} \cdot \pi]$$

- b) Zeichnen Sie den Graphen von g mithilfe einer Wertetabelle für ganzzahlige x -Werte im Bereich $|x| \leq 4$. (4 BE)

- c) Die Parabel p mit der Gleichung $p(x) := \frac{3}{4} \cdot x^2 - 3$ und der Graph von g schließen im vierten

Quadranten ein Flächenstück ein.

Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (4 BE)

Teilaufgabe a)

$$\text{Nullstelle von } p: \quad p(x) = 0 \rightarrow \frac{3 \cdot x^2}{4} - 3 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g(x, a, b) := a \cdot \cos(b \cdot x)$$

$$\text{Nullstellen von Kosinus:} \quad x_0(k, b) := b \cdot x = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \text{ auflösen, } x \rightarrow \frac{\pi \cdot (2 \cdot k + 1)}{2 \cdot b}$$

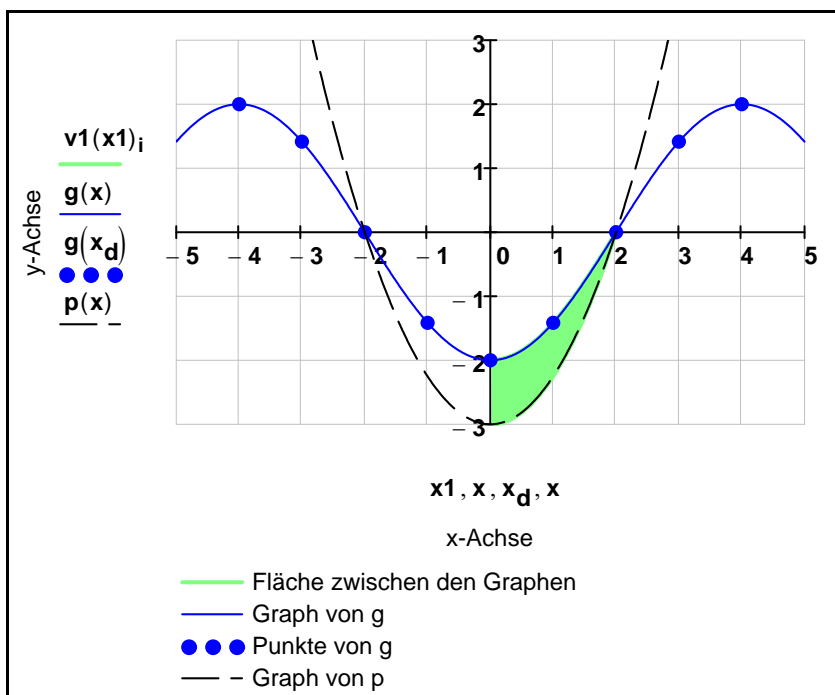
$$x_0(0, b) \rightarrow \frac{\pi}{2 \cdot b}$$

$$x_0(0, b) = 2 \text{ auflösen, } b \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{4}$$

$$g\left(0, a, \frac{\pi}{4}\right) = -2 \Leftrightarrow a \cdot \cos(0) = -2 \Leftrightarrow a = -2$$

$$\text{Konkrete Funktion:} \quad g(x) := -2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$$

Teilaufgabe b)



| $x_d =$ |
|---------|
| -4 |
| -3 |
| -2 |
| -1 |
| 0 |
| 1 |
| 2 |
| 3 |
| 4 |

| $g(x_d) =$ |
|------------|
| 2 |
| 1.4 |
| 0 |
| -1.4 |
| -2 |
| -1.4 |
| 0 |
| 1.4 |
| 2 |

Teilaufgabe c)

Gemeinsame Punkte: $x_1 := -2$ $x_2 := 2$

Stammfunktion:

$$\int \left[-2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) - \left(\frac{3}{4} \cdot x^2 - 3\right) \right] dx = -2 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) - \frac{1}{4} \cdot x^3 + 3 \cdot x$$

$$H(x) := -2 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) - \frac{1}{4} \cdot x^3 + 3 \cdot x \qquad H(2) = 4 - \frac{8}{\pi} \qquad H(0) = 0$$

Flächenberechnung: $A := \int_0^2 (g(x) - p(x)) dx$

$A \rightarrow 4 - \frac{8}{\pi} \rightarrow 4 - \frac{8}{\pi} = 1.454$

Aufgabe 2: aus der Abschlussprüfung 1999 / AI

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2} \cdot (x + 1)\right]$ und $x \in \mathbb{R}$.

- a) Ermitteln Sie alle Nullstellen und Extremstellen der Funktion f. (3 BE)
- b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f nach Berechnung geeigneter Funktionswerte im Bereich $-5 \leq x \leq 5$. (4 BE)

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $f(x) := \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2} \cdot (x + 1)\right]$

Nullstellen: $\frac{\pi}{2} \cdot (x + 1) = k \cdot \pi \Leftrightarrow x + 1 = 2 \cdot k \Leftrightarrow x_0(k) := (2 \cdot k - 1)$

1. Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = \cos\left[\frac{\pi \cdot (x + 1)}{2}\right]$

Hor. Tangenten: $f'(x) = 0 \rightarrow \cos\left[\frac{\pi \cdot (x + 1)}{2}\right] = 0$

$x_1(k) := \frac{\pi \cdot (x + 1)}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot k + 1)$ auflösen, $x \rightarrow 2 \cdot k$ $x_1(k) := 2 \cdot k$

2. Ableitung: $f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x) = -\frac{\pi \cdot \sin\left[\frac{\pi \cdot (x + 1)}{2}\right]}{2}$

Nullstellen:

$k := -2..3$

$x_0(k) =$

| |
|----|
| -5 |
| -3 |
| -1 |
| 1 |
| 3 |
| 5 |

Hochpunkte:

$k_1 := -2, 0..3$

$x_1(k_1) =$

| |
|----|
| -4 |
| 0 |
| 4 |

VZ 2. Abl.

$f''(x_1(k_1)) =$

| |
|--------|
| -1.571 |
| -1.571 |
| -1.571 |

negativ,
also HP

VZ 2. Abl.

$f''(x_1(k_2)) =$

| |
|-------|
| 1.571 |
| 1.571 |
| 1.571 |

positiv,
also TP

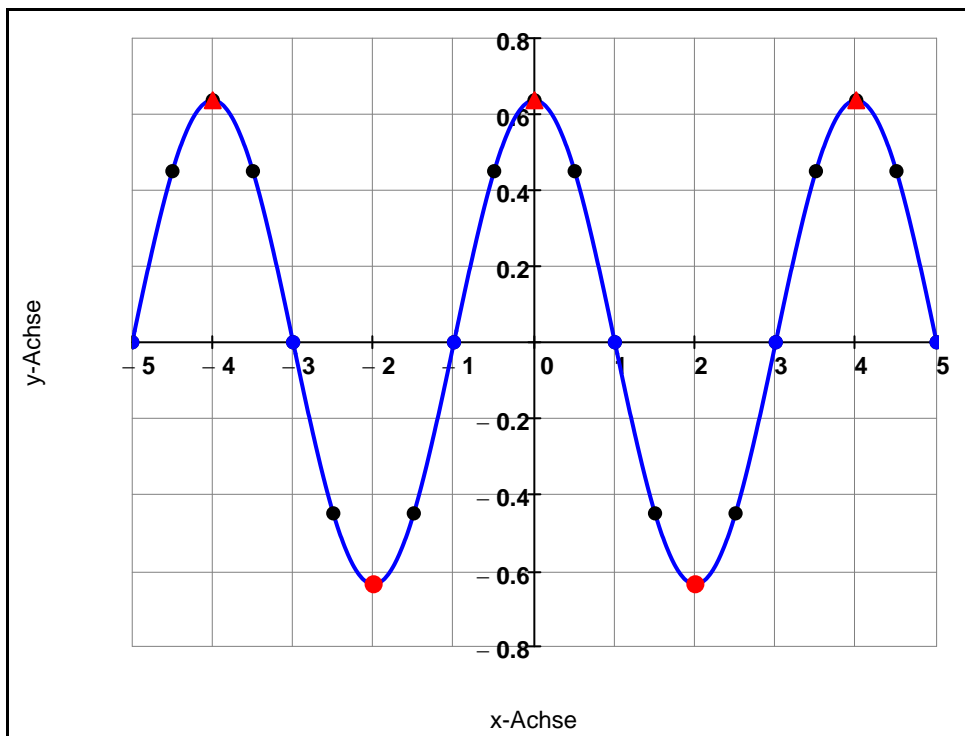
Tiefpunkte:

$k_2 := -1, 1..3$

$x_1(k_2) =$

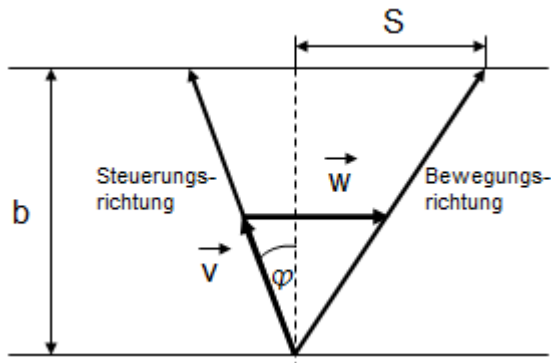
| |
|----|
| -2 |
| 2 |
| 6 |

Teilaufgabe b)



Aufgabe 3: aus der Abschlussprüfung 1999 / A II

Ein Motorboot überquert einen Fluss der Breite b , dessen Fließgeschwindigkeit w als konstant angenommen werden kann. Das Boot fährt mit der konstanten Eigengeschwindigkeit $v < w$. Wegen $v < w$ erfährt das Boot in jedem Fall eine Abdrift S . Um die Abdrift S möglichst klein zu halten, wird das Boot unter einem Vorhaltewinkel φ gegen die direkte Überquerungsrichtung gesteuert (siehe Skizze).



Die Abdrift S als Funktion des Vorhaltewinkels φ ist gegeben durch:

$$S(\varphi) = \frac{b}{v} \cdot \frac{w - v \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

mit $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

a) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $S(\varphi)$ an den Randstellen des gegebenen Definitionsbereichs. (3 BE)

b) Zeigen Sie, dass für die erste Ableitungsfunktion der Funktion $S(\varphi)$ gilt:

$$\frac{d}{d\varphi} S(\varphi) = \frac{b}{v} \cdot \frac{-v + w \cdot \sin(\varphi)}{(\cos(\varphi))^2} \quad (3 \text{ BE})$$

c) Bestimmen Sie den Vorhaltewinkel φ_0 , bei dem das Boot die geringste Abdrift erfährt, wenn es die Eigengeschwindigkeit $v = 1.0 \cdot \frac{m}{s}$ und der Fluss die Breite $b = 20 \cdot m$ und die Fließgeschwindigkeit $w = 2.0 \cdot \frac{m}{s}$ besitzt. Wie groß ist in diesem Fall die Abdrift? (6 BE)

d) Zeigen Sie, dass sich das Boot für den in Teilaufgabe c) behandelten Fall senkrecht zur Steuerungsrichtung bewegt. (3 BE)

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $S(\varphi, v, w, b) := \frac{b}{v} \cdot \frac{w - v \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$

linker Randwert: $S(0, v, w, b) \rightarrow \frac{b \cdot w}{v}$

rechter Randwert: $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{b}{v} \cdot \frac{(w - v \cdot \sin(\varphi))}{\cos(\varphi)} \right] \rightarrow \frac{b \cdot \text{signum}(w - v, 0)}{v} \cdot \infty$

Da $w > v$ folgt $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{b}{v} \cdot \frac{w - v \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right) \rightarrow \infty$

Teilaufgabe b)

Ableiten:
$$S'(\varphi, v, w, b) := \frac{d}{d\varphi} S(\varphi, v, w, b) = \frac{b \cdot \sin(\varphi) \cdot (w - v \cdot \sin(\varphi))}{v \cdot \cos(\varphi)^2} - b$$

Vereinfachen:
$$S'(\varphi, v, w, b) = \frac{b \cdot v - b \cdot w \cdot \sin(\varphi)}{v \cdot \cos(\varphi)^2} = \frac{b \cdot (v - w \cdot \sin(\varphi))}{v \cdot \cos(\varphi)^2}$$

Teilaufgabe c)

Horizontale Tangenten:
$$S'(\varphi, v, w, b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\varphi) \cdot w - v = 0$$

Zahlenwerte einsetzen:
$$\sin(\varphi) = \frac{v}{w} = \frac{1}{2}$$

$$w = 2.0 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad b = 20 \cdot \text{m} \quad v = 1.0 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Auflösen:
$$\varphi_0 := \text{asin}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \varphi_0 = 30 \cdot \text{Grad}$$

$$S_1 := S(\varphi_0, v, w, b) = 34.6 \text{ m} \quad \text{das ist die geringste Abdrift.}$$

linker Randwert:
$$S(0, v, w, b) = 40 \text{ m}$$

Da die Funktion im Intervall $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ stetig ist und φ_0 das einzige Extremum ist, genügt der Vergleich mit den Randwerten (siehe 3.1):

absolutes Minimum (30 Grad / 40 m)

Teilaufgabe d)

geringste Abdrift:
$$S_1 := S(\varphi_0, v, w, b)$$

Winkel zwischen dem Lot und der Bewegungsrichtung:

$$\tan(\varphi_1) := \frac{S_1}{b} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 := \text{atan}\left(\frac{S_1}{b}\right) \quad \varphi_1 = 1.047 \quad \varphi_1 = 60 \cdot \text{Grad}$$

Gesamtwinkel:
$$\varphi_{\text{ges}} := \varphi_0 + \varphi_1 \quad \varphi_{\text{ges}} = 1.571 \quad \varphi_{\text{ges}} = 90 \cdot \text{Grad}$$

Aufgabe 4: aus der Abschlussprüfung 2002 / A II

Gegeben ist die Funktion $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$ mit den Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c so, dass der Graph der Funktion g durch den Punkt $P(0/4)$ verläuft und im Punkt $W(1/2)$ der Wendepunkt mit dem kleinsten positiven x -Wert

vorliegt. [Ergebnis: $a = 2$, $b = \frac{\pi}{2}$, $c = 2$] (6 BE)

b) Zeichnen Sie den Graphen von g mit Hilfe geeigneter Funktionswerte für $-2 \leq x \leq 2$. (5 BE)

Teilaufgabe a)

Funktionsterm: $g(x, a, b, c) := a \cdot \cos(b \cdot x) + c$

1. Ableitung: $g'(x, a, b, c) := \frac{d}{dx} g(x, a, b, c) = -a \cdot b \cdot \sin(b \cdot x)$

2. Ableitung: $g''(x, a, b, c) := \frac{d}{dx} g'(x, a, b, c) = -a \cdot b^2 \cdot \cos(b \cdot x)$

$P \in G_g$: $g(0, a, b, c) = 4 \rightarrow a + c = 4$

$W \in G_g$: $g(1, a, b, c) = 2 \rightarrow c + a \cdot \cos(b) = 2$

Wendepunkt: $g''(1, a, b, c) = 0 \rightarrow -a \cdot b^2 \cdot \cos(b) = 0$

Gleichung 1: $a + c = 4 \quad c = 4 - a$

Gleichung 2: $c + a \cdot \cos(b) = 2$

Gleichung 3: $-a \cdot b^2 \cdot \cos(b) = 0$

Da $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ folgt aus (3): $\cos(b) = 0 \Rightarrow b = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot k + 1)$

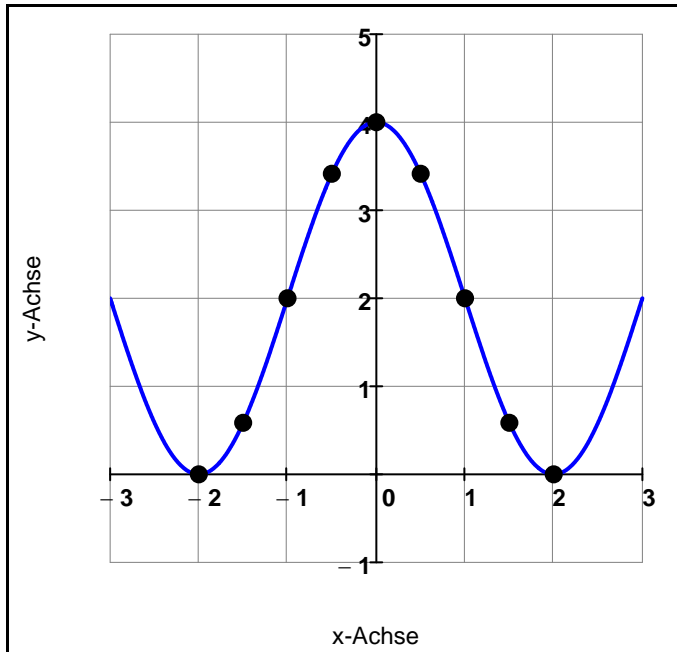
kleinster positiver Wert: $b := \frac{\pi}{2}$

(1) und (3) in (2) einsetzen: $4 - a + a \cdot \cos(b) = 2$

$4 - a = 2$ auflösen, $a \rightarrow 2$ $a := 2$ $c := 2$

Teilaufgabe b)

$$g(x) := g(x, a, b, c) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) + 2$$



$x_W =$

| |
|------|
| -2 |
| -1.5 |
| -1 |
| -0.5 |
| 0 |
| 0.5 |
| 1 |
| 1.5 |
| 2 |

$g(x_W) =$

| |
|-----|
| 0 |
| 0.6 |
| 2 |
| 3.4 |
| 4 |
| 3.4 |
| 2 |
| 0.6 |
| 0 |

Aufgabe 5: aus der Abschlussprüfung 2005 / A I

Gegeben ist die Funktion g mit den reellen Parametern a und b :

$$g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) \text{ in der Definitionsmenge } D_g = \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von g durch den Punkt $T(1/2)$ verläuft und die kleinste positive Nullstelle bei $x = 2$ liegt. (5 BE)

$$[\text{Ergebnis: } a = 2; b = \frac{\pi}{2}]$$

Allgemeiner Funktionsterm: $g(x, a, b) := a \cdot \sin(b \cdot x)$

$$T(1/2) \in G_f: \quad (1) \quad g(1, a, b) = 2 \rightarrow a \cdot \sin(b) = 2$$

$$NS(2/0) \in G_f: \quad (2) \quad g(2, a, b) = 0 \rightarrow a \cdot \sin(2 \cdot b) = 0$$

Aus (2): $a = 0 \vee \sin(2 \cdot b) = 0$ $a = 0$ Widerspruch zu (1)

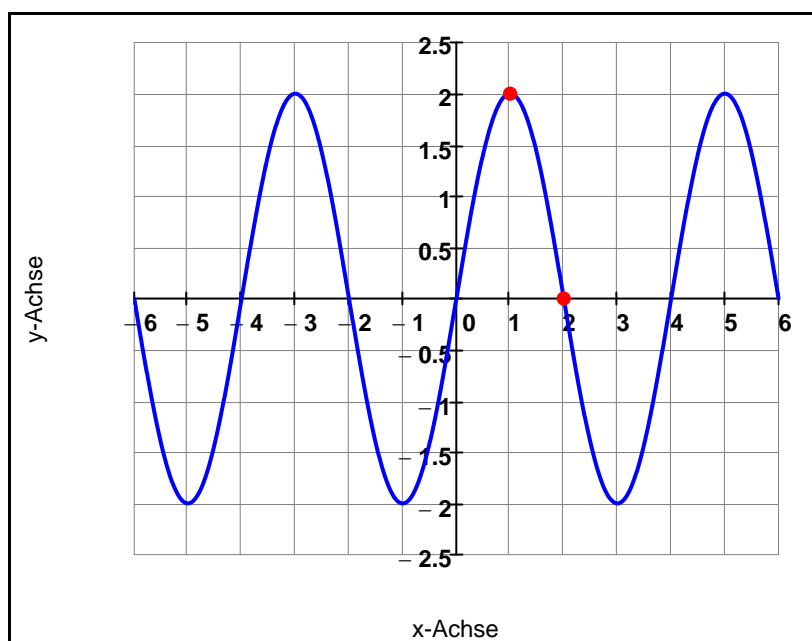
$$\Rightarrow a \neq 0 \quad 2 \cdot b = k \cdot \pi \text{ auflösen, } b \rightarrow \frac{\pi \cdot k}{2} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

für die kleinste positive NS: $k=1$

$$b := \frac{\pi}{2}$$

in (1) $a \cdot \sin(b) = 2$ auflösen, $a \rightarrow 2$ $a = 2$

$$g(x) := 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$$



Aufgabe 6: aus der Abschlussprüfung 2006 / A II

Gegeben ist die reelle Funktion $g(x) = x - 4 - \sin(x)$ in der Definitionsmenge $D_g =]0 ; 2\pi [$.

- a) Zeigen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens, dass die Funktion g in ihrer Definitionsmenge genau eine Nullstelle besitzt. (4 BE)
 b) Berechnen Sie diese Nullstelle ausgehend vom Startwert $x_1 = 3$ mit dem Newton-Verfahren. Führen Sie zwei Näherungsschritte durch und geben Sie die für die Berechnung notwendigen Teilergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an. (4 BE)

Teilaufgabe a)

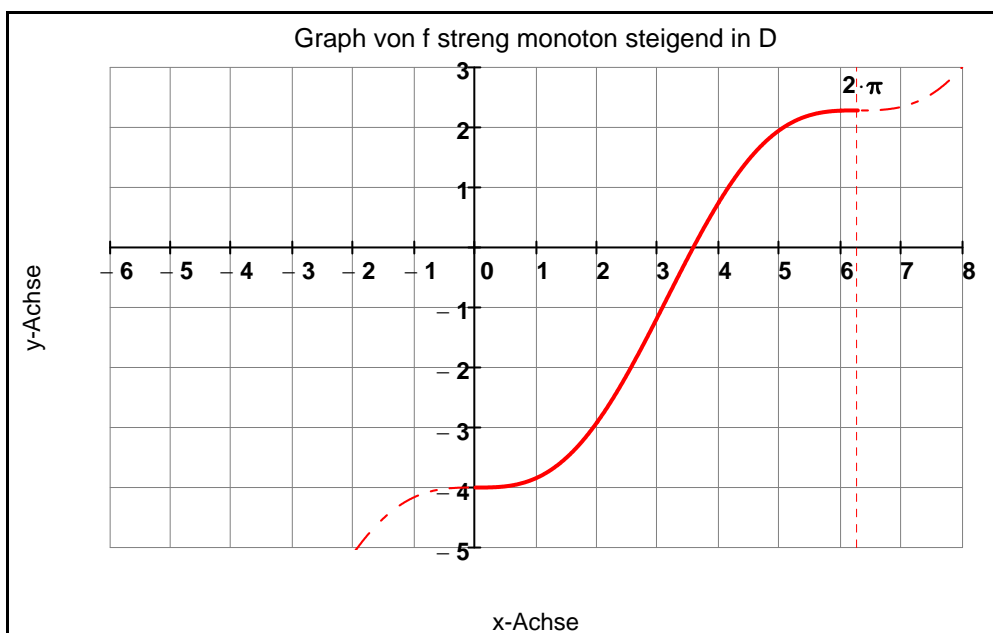
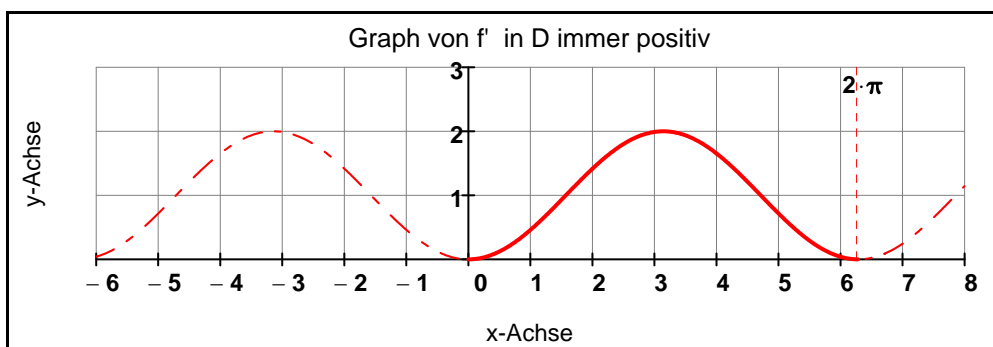
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \rightarrow -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} g(x) \rightarrow 2 \cdot \pi - 4 \rightarrow 2.3$$

$$g'(x) := \frac{d}{dx} g(x) = 1 - \cos(x) > 0 \quad \text{Die Funktion } g(x) \text{ ist streng monoton steigend.}$$

Auf Grund der Monotonie und der Randwerte besitzt die Funktion genau eine Nullstelle in ID_g .

Graphische Veranschaulichung (in der Prüfung nicht verlangt):



Teilaufgabe b)

$$x_1 := 3$$

$$x_2 := x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = 3.573$$

$$x_3 := x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = 3.578$$

NS (3.578 / 0)

Aufgabe 7: Abschlussprüfung 2007 / A I

Gegeben ist die Funktion $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ mit den reellen Parametern a , b und c und der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Werte für die Parameter a , b und c so, dass der Graph von g den Tiefpunkt $T(0 | -4)$ aufweist und die Periodenlänge 8 besitzt, wobei a und b negativ gewählt werden sollen. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

Zeichnen Sie den Graphen von g für $-6 \leq x \leq 6$. (8 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $g(x) = -4 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$]

Ansatz für Funktionsterm: $g(x, a, b, c) := a \cdot \sin(b \cdot x + c)$

Ableitung: $g'(x, a, b, c) := \frac{d}{dx} g(x, a, b, c) = a \cdot b \cdot \cos(c + b \cdot x)$

Periodenlänge: $p = \frac{2 \cdot \pi}{b} \quad \frac{2 \cdot \pi}{b} = 8 \rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{b} = 8 \text{ auflösen, } b \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$b_1 := \frac{1}{4} \cdot \pi$ keine Lösung $b_2 := -\frac{1}{4} \cdot \pi$

$T(0 | -4) \in G_g$: $g(0, a, b_2, c) = -4 \rightarrow a \cdot \sin(c) = -4$ (1)

$g'(0) = 0$ $g'(0, a, b_2, c) = 0 \rightarrow -\frac{\pi \cdot a \cdot \cos(c)}{4} = 0$ (2)

Produkt = 0: $\cos(c) = 0 \quad c_1 := \arccos(0)$ $c_1 = \frac{\pi}{2}$

Periodizität von $\cos(x)$: $c_2 := \pi + c_1$ $c_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2}$ keine Lösung

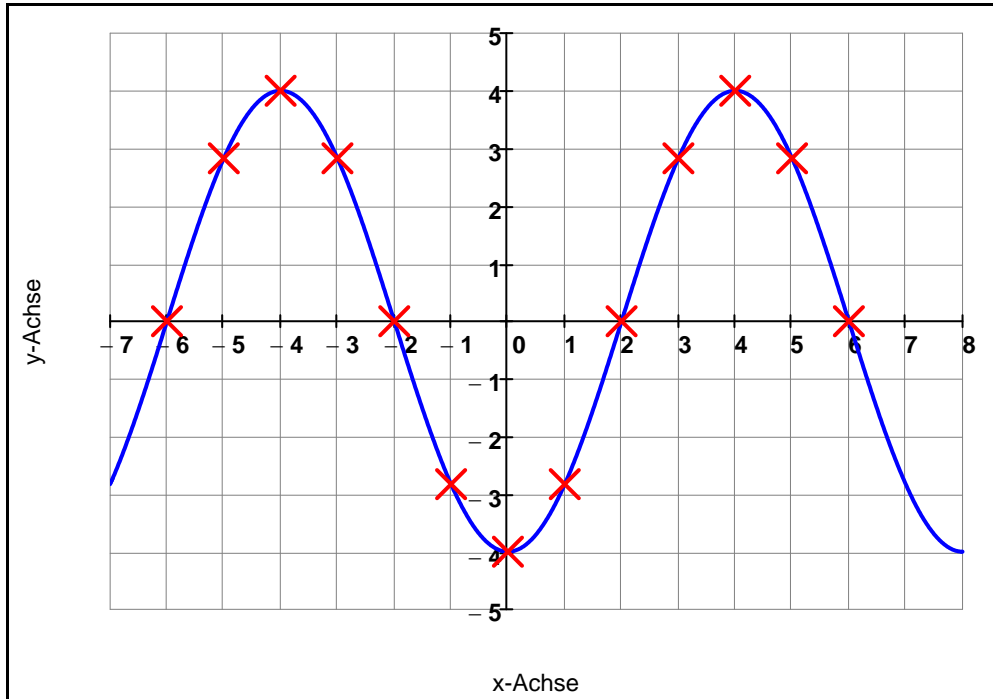
In (1) einsetzen: $a \cdot \sin(c_1) = -4$ auflösen, $a \rightarrow -4$ $a_1 := -4$

$a \cdot \sin(c_2) = -4$ auflösen, $a \rightarrow 4$ $a_2 := 4$ keine Lösung

Bestimmter Funktionsterm: $g_0(x) := g(x, a_1, b_2, c_1) = -4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot x}{4}\right)$

Das entspricht dem gegebenen Funktionsterm: $g(x) := -4 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$





$x_d =$

| |
|----|
| -6 |
| -5 |
| -4 |
| -3 |
| -2 |
| -1 |
| 0 |
| 1 |
| 2 |
| 3 |
| 4 |
| 5 |
| 6 |

$g(x_d) =$

| |
|------|
| 0 |
| 2.8 |
| 4 |
| 2.8 |
| 0 |
| -2.8 |
| -4 |
| -2.8 |
| 0 |
| 2.8 |
| 4 |
| 2.8 |
| 0 |

Aufgabe 8: Abschlussprüfung 2009 / A I

In einem Flughafenterminal wird die Gepäckabfertigung neu geplant. Unter anderem ist ein neues Förderband für den Transport des Gepäcks vorgesehen.

Das Förderband soll zunächst horizontal verlaufen, hat jedoch auf einer Strecke von sechs Metern einen Höhenunterschied von einem Meter zu überwinden, um dann wieder horizontal weiter geführt zu werden.

Der Übergang von der höher gelegenen auf die tiefere Ebene soll auf einer kosinusförmigen Kurve verlaufen.

Der (nicht maßstabsgetreue) Verlauf des Förderbands ist unten schematisch als Graph G_h einer Funktion h in Abhängigkeit von x dargestellt. x gibt dabei die Länge der zurückgelegten Strecke in horizontaler Richtung, h die vom Hallenboden aus gemessene Höhe des Förderbands in Meter an. Auf die Verwendung von Einheiten wird verzichtet.

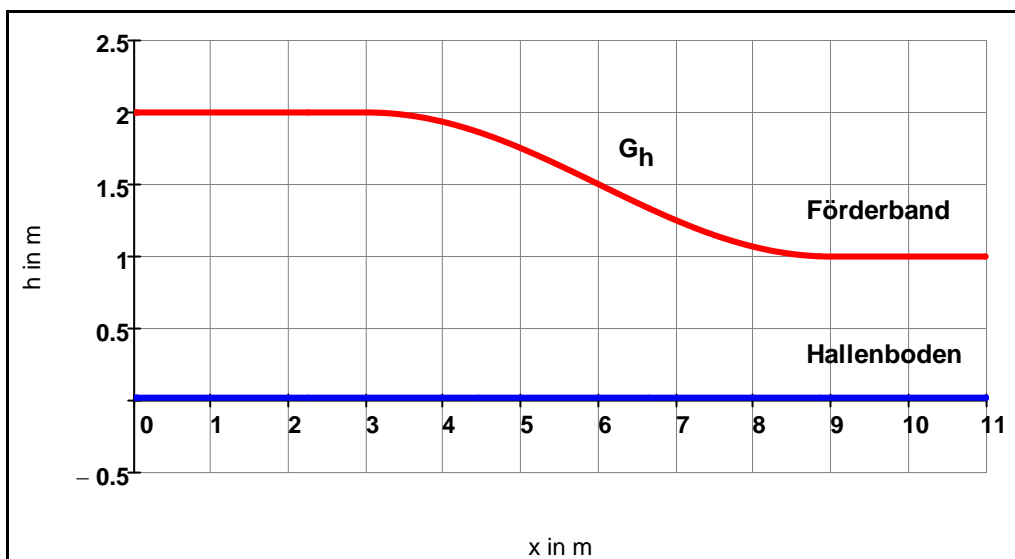
- a) Der in der Zeichnung abgebildete Graph G_h verläuft in der ganzen Definitionsmenge $D_h = [0; 11]$ ohne Knick. Der zugehörige Funktionsabschnitt im Bereich $3 \leq x \leq 9$ soll dabei durch die Gleichung $h(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$ beschrieben werden. Entnehmen Sie der Zeichnung geeignete Funktionswerte und bestimmen Sie daraus die Konstanten a , b , c und d . (7 BE)

- b) Die Funktion h kann für $3 \leq x \leq 9$ auch mit der Gleichung $h(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) + 3 \right)$

beschrieben werden.

Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsfunktionen, dass der Graph G_h an der Stelle $x = 6$ einen Wendepunkt besitzt und ermitteln Sie das prozentuale maximale Gefälle des Förderbands auf eine Nachkommastelle gerundet. (7 BE)

- c) Das Förderband hat eine Breite von 1,20 Meter. Um eine dauerhafte Stabilität zu gewährleisten, soll im gezeichneten Bereich $0 \leq x \leq 11$ der gesamte Raum zwischen Förderband und Hallenboden mit Beton ausgefüllt werden. Berechnen Sie das Volumen dieses Unterbaus. (4 BE)



Teilaufgabe a)

Kosinusfunktion schwankt zwischen Funktionswerten 1 und 2:

$$a := \frac{1}{2}$$

Halbe Periodenlänge zwischen 3 und 9:

$$p := 2 \cdot 6$$

$$p = 12$$

Frequenz:

$$p = \frac{2 \cdot \pi}{b} \Rightarrow$$

$$b := \frac{2 \cdot \pi}{p}$$

$$b = \frac{\pi}{6}$$

Phasenverschiebung um 3 nach rechts: $c := \frac{c}{b} = -3$ auflösen, $c \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

$$c = -\frac{\pi}{2}$$

Verschiebung um 1,5 nach oben:

$$d := \frac{3}{2}$$

Teilaufgabe b)

1. Ableitung:
$$h'(x) := \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$$

2. Ableitung:
$$h''(x) := -\frac{\pi^2}{72} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$$

Wendepunkte:
$$\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \cdot x = k \cdot \pi \Leftrightarrow x_0 = 6 \cdot k \quad \text{und } k \in \mathbb{Z}$$

Wähle

$$k = 1$$

$$x_W := 6$$

einfache Nullstelle, also Wendestelle

Gefälle entspricht dem Steigungswert:

$$h'(6) = -\frac{\pi}{12} = -0.262$$

$$|h'(6)| = 26.18\%$$

Das maximale Gefälle beträgt **26,2%**.

Teilaufgabe c)

$$V := 1.2 \cdot \left[3 \cdot 2 + \int_3^9 \left(\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) + \frac{3}{2} \right) dx + 2 \cdot 1 \right]$$

$$V = 20.4$$

Der Unterbau hat ein Volumen von 20,4 m³.

Nebenrechnung:

$$H(x) := \int \left(\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) + \frac{3}{2} \right) dx = -\frac{6 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) - 3 \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot \pi}$$

$$H(9) \rightarrow \frac{27}{2} \quad H(3) \rightarrow \frac{9}{2}$$

$$\int_3^9 \left(\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) + \frac{3}{2} \right) dx \rightarrow 9$$

Aufgabe 9: aus der Abschlussprüfung 2010 Nachtermin

Im Verlauf eines Jahres ändert sich die Tageslänge L , das heißt die Zeitdauer, während der sich die Sonne oberhalb des Horizonts befindet. In einem mathematischen Modell wird die in Stunden angegebene Tageslänge L in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen beschrieben. Jeder Monat wird hierbei mit 30 Tagen gerechnet, somit hat das Jahr 360 Tage.

Für dieses Modell wird die Zeit t als kontinuierliche reelle Variable betrachtet. Für München ergibt sich für den Zeitraum eines Jahres näherungsweise die Funktion

$$L(t) = 12.2 - 3.85 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right), \quad t \in [0.5; 360.5].$$

Die Einheiten bleiben dabei unberücksichtigt.

- a) Berechnen Sie die Ableitungen $\frac{dL(t)}{dt}$ sowie $\frac{d^2L(t)}{dt^2}$ und bestimmen Sie damit die maximale und die minimale Tageslänge für München im Verlauf des Jahres. **(10 BE)**

- b) Berechnen Sie $\int_{0.5}^{360.5} L(t) dt$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Integralwertes im gegebenen Sachzusammenhang. **(4 BE)**

- c) Ermitteln Sie die Zeitpunkte, an denen sich die Tageslängen am schnellsten ändern.

Teilaufgabe a)

Funktionsterm:
$$L(t) := 12.2 - 3.85 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$$

1. Ableitung:
$$L'(t) = 3.85 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$$

$$L'(t) = 0.067 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$$

2. Ableitung:
$$L''(t) := 3.85 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$$

$$L''(t) = 1.2 \cdot 10^{-3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$$

Hor. Tangenten:
$$L'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20} = k \cdot \pi \text{ auflösen, } t \rightarrow 180 \cdot k - 9$$

Extremstellen: $t_E(k) := 180 \cdot k - 9$

$k_1 := 1 \dots 2$

| | |
|--------------|--------------|
| $t_E(k_1) =$ | |
| 171 | Sommeranfang |
| 351 | Winteranfang |

Art der Extremstelle: $L''(171) = -1.173 \times 10^{-3}$ negativ, also Hochpunkt

maximale Tageslänge: $L(171) = 16.05$ **HP(171/16,05)**

$L''(351) = 1.173 \times 10^{-3}$ positiv, also Tiefpunkt

minimale Tageslänge: $L(351) = 8.35$ **TP(351/8,35)**

Teilaufgabe b)

Stammfunktion:

$$\int \left(\frac{61}{5} - \frac{77}{20} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right) \right) dt = 12.2 \cdot t - 3.85 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$$

Taschenrechner: $H(t) := 12.2 \cdot t - 3.85 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right)$

$$H(360.5) = 4362 \quad H(0.5) = -30.308$$

$$H(360.5) - H(0.5) = 4392$$

$$\int_{0.5}^{360.5} \left(12.2 - 3.85 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right) \right) dt \text{ Gleitkommazahl, 2} \rightarrow 4391.0$$

Das Integral gibt die Anzahl der Tageslichtstunden während eines Jahres an.

Teilaufgabe c)

größte Änderung der Tageslänge = Wendepunkt

$$L''(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right) = 0$$

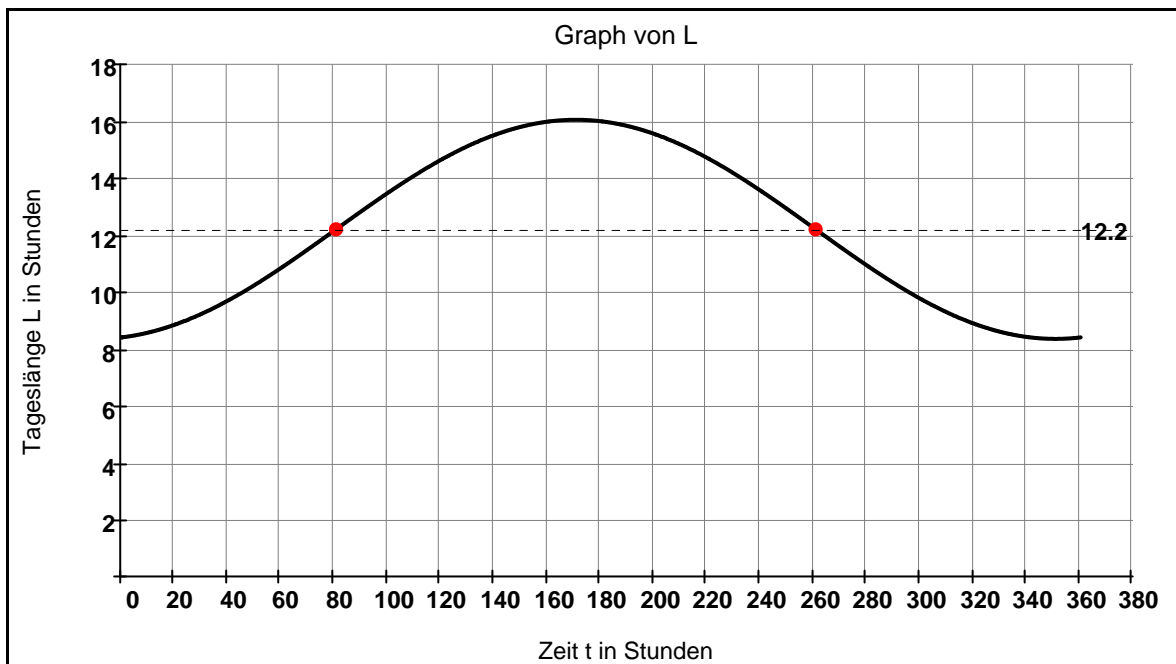
$$\left(\frac{\pi}{180} \cdot t + \frac{\pi}{20}\right) = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \text{ auflösen, } t \rightarrow 180 \cdot k + 81$$

Wendestellen: $t_W(k) := 180 \cdot k + 81$ da einfache Nullstellen

$t_W(0) = 81$ entspricht dem Frühlingsanfang

$t_W(1) = 261$ entspricht dem Herbstanfang

Definitionsmenge: $t_0 := 0,5, 0,6 \dots 360,5$



Aufgabe 10: aus der Abiturprüfung 2011 Baden Württemberg, Wahlteil

Ein Staubecken wird zur Zeit der Schneeschmelze gefüllt. Da die Schneeschmelze temperaturabhängig ist, kann die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion w mit

$$w(t) := 50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 24$$

beschrieben werden (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $w(t)$ in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$).

a) In welchem Zeitraum ist die momentane Zuflussrate größer als $100 \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$?

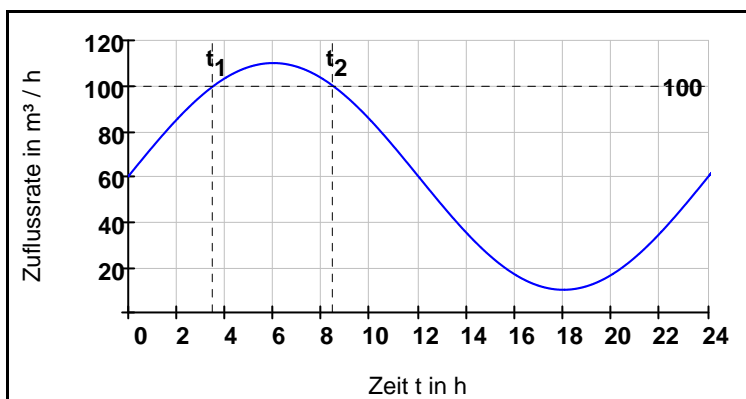
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?

b) Zu Beobachtungsbeginn enthält das Staubecken $5000 \cdot \text{m}^3$ Wasser.

Wie viel Wasser enthält es nach 24 Stunden?

Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm für die zum Zeitpunkt t im Staubecken enthaltene Wassermenge.

Nach welcher Zeit sind $6000 \cdot \text{m}^3$ Wasser im Becken?

Teilaufgabe a)

$$50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = \frac{100 - 60}{50} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Substitution: } \sin(u) = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad u_0 := \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\text{Lösung im ersten Quadranten:} \quad u_1 := u_0 \quad u_1 = 0.927$$

$$\text{Lösung im zweiten Quadranten:} \quad u_2 := \pi - u_0 \quad u_2 = 2.214$$

$$\text{Resubstitution:} \quad t_1 := u_1 \cdot \frac{12}{\pi} \quad t_1 = 3.542$$

$$t_2 := u_2 \cdot \frac{12}{\pi} \quad t_2 = 8.458$$

Es soll gelten: $w(t) > 100$ $t \in] 3,52 ; 8,46 [$

Die stärkste Abnahme der Zuflussrate befindet sich an der Wendestelle der Funktion $w(t)$.

1. Ableitung: $w'(t) := 50 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$

2. Ableitung: $w''(t) := -50 \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$

Wendestellen: $\sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = 0 \Leftrightarrow x_W(k) := \frac{\pi}{12} \cdot t = k \cdot \pi$ auflösen, $t \rightarrow 12 \cdot k$

$k_1 := 0..2$

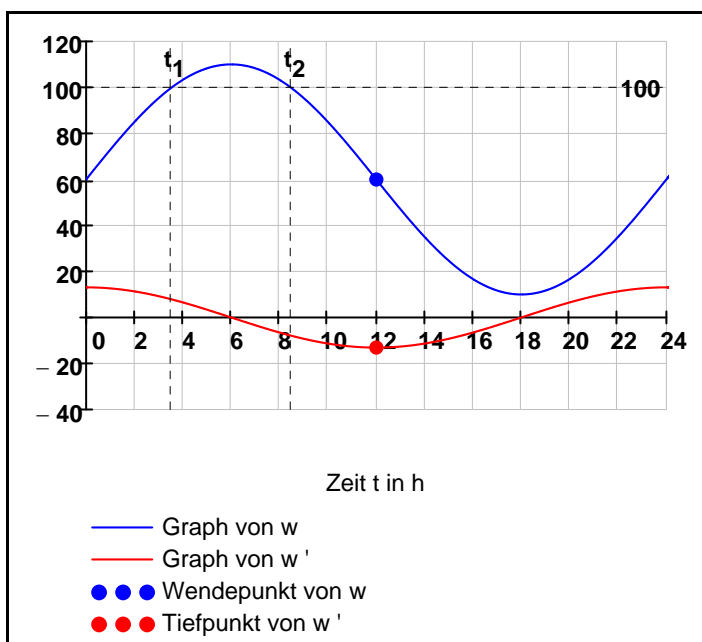
$x_W(k_1) =$

| |
|----|
| 0 |
| 12 |
| 24 |

$w'(x_W(k_1)) =$

| |
|--------|
| 13.09 |
| -13.09 |
| 13.09 |

Abnahme



Die Zuflussratenfunktion nimmt 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn am stärksten ab.

Teilaufgabe b)

Wasservolumen nach 24 Stunden in m³:

$$V := 5000 + \int_0^{24} w(t) dt \qquad V = 6.44 \times 10^3$$

Nebenrechnung:

$$W(t) := \int \left(50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60 \right) dt = -\frac{600 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{12}\right) - 60 \cdot \pi \cdot t}{\pi}$$

Obere Grenze:

Untere Grenze:

$$W(24) \rightarrow \frac{1440 \cdot \pi - 600}{\pi} = 1.249 \times 10^3$$

$$W(0) \rightarrow -\frac{600}{\pi} = -190.986$$

$$W(24) - W(0) = 1.44 \times 10^3$$

$$W(24) - W(0) + 5000 = 6440$$

Integralfunktion:

$$V(t) = 5000 + \int_0^t \left(50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot \tau\right) + 60 \right) d\tau$$

$$\blacksquare = 5000 + \left[-\frac{600}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60 \cdot t \right) \right] - \left[-\frac{600}{\pi} (\cos(0) + 60 \cdot 0) \right]$$

$$\blacksquare = 5000 + \left[-\frac{600}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60 \cdot t \right) \right] + \frac{600}{\pi}$$

Integralfreier Funktionsterm:

$$V(t) := 5000 + \frac{600}{\pi} - \frac{600}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60 \cdot t$$

$$V(t) = 6000 \rightarrow 60 \cdot t - \frac{600 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{12}\right)}{\pi} + \frac{600}{\pi} + 5000 = 6000 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } t \\ \text{Gleitkommazahl, } 4 \end{array} \right. \rightarrow 10.53$$