Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2012

- **Mathematik 13 Technik - Aufgabe AI - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f_m(x) = \arctan\left(1 - \frac{2}{m \cdot x}\right)$ mit $m \in IR^+$ in der von m unabhängigen Definitionsmenge $D_f = IR \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie die Nullstelle von f_m in Abhängigkeit von m sowie das Verhalten von $f_m(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und die Gleichungen der Asymptote des Graphen von f_m.

$$f_m(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan\left(1 - \frac{2}{m \cdot x}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{m \cdot x} = 0$$

Nullstellen: $x_0 = \frac{2}{m}$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan\left(1 - \underbrace{\frac{2}{m \cdot x}}_{\to 0}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$ waagrechte Asymptote: $y = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x \to \infty} \arctan\left(1 - \underbrace{\frac{2}{m \cdot x}}_{\to 0}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{2}{m \cdot x}\right) \to -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \arctan\underbrace{\left(1 - \frac{2}{m \cdot x}\right)}_{\to -\infty} \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{2}{m \cdot x}\right) \to \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \arctan\underbrace{\left(1 - \frac{2}{m \cdot x}\right)}_{\to \infty} \to \frac{\pi}{2}$$

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)
Bestimmen Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_m und entscheiden Sie, ob der Graph Extrempunkte besitzt.

[Teilergebnis: $f'_m(x) = \dfrac{m}{m^2 \cdot x^2 - 2 \cdot m \cdot x + 2}$]

$$f'_m(x) = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{2}{m \cdot x}\right)^2} \cdot \left[-\frac{2}{m} \cdot \frac{(-1)}{x^2}\right] = \frac{2 \cdot m}{\left[1 + \left(1 - \frac{2}{m \cdot x}\right)^2\right] \cdot (m \cdot x)^2} = \frac{2 \cdot m}{(m \cdot x)^2 + (m \cdot x - 2)^2}$$

$$\ldots = \frac{2 \cdot m}{(m \cdot x)^2 + (m \cdot x)^2 - 4 \cdot m \cdot x + 4} = \frac{2 \cdot m}{2 \cdot \left[(m \cdot x)^2 - 2 \cdot m \cdot x + 2\right]} = \frac{m}{(m \cdot x)^2 - 2 \cdot m \cdot x + 2}$$

Nenner: $(m \cdot x)^2 - 2 \cdot m \cdot x + 2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1+i}{m} \\ \frac{1-i}{m} \end{pmatrix}$ keine Lösung

Nenner ist immer positiv, da nach oben geöffnete Parabel ohne Nullstellen

Zähler ist positiv nach Vors. $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$

G_f ist streng monoton steigend in $]-\infty; 0[$ und in $]0; \infty[$. G_f besitzt keine Extrempunkte.

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)
Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f_m in Abhängigkeit von m.

$$f''_m(x) = \frac{-m}{\left(m^2 \cdot x^2 - 2 \cdot m \cdot x + 2\right)^2} \cdot \left(2 \cdot m^2 \cdot x - 2 \cdot m\right) = \frac{2 \cdot m^2 \cdot (1 - m \cdot x)}{\left(m^2 \cdot x^2 - 2 \cdot m \cdot x + 2\right)^2}$$

$f''_m(x) = 0$ $\quad 1 - m \cdot x = 0$ $\quad \Rightarrow \quad x_W = \dfrac{1}{m}$

	$x \neq 0$		$x = \frac{1}{m}$	
Zähler	pos	pos		neg
Nenner	pos	pos		pos
$f''_m(x)$	pos	pos		neg
G_f	lk	lk	WP	rk

$f_m\left(\frac{1}{m}\right) = \arctan(1 - 2) = -\frac{\pi}{4}$

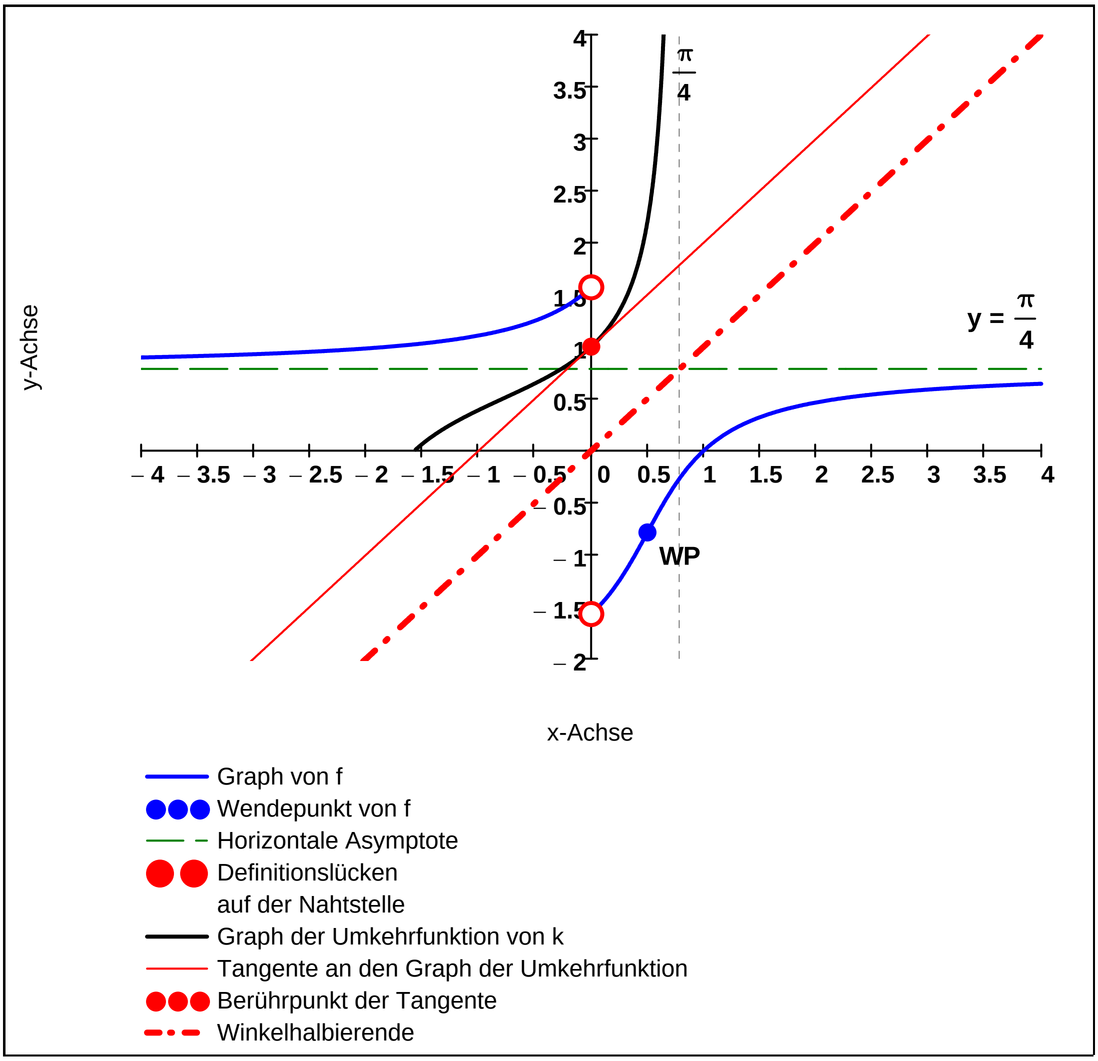
$\Rightarrow \quad WP\left(\frac{1}{m}, -\frac{\pi}{4}\right)$

G_f ist linksgekrümmt für $]-\infty; 0[$ und für $]0; \frac{1}{m}]$, G_f ist rechtsgekrümmt für $[\frac{1}{m}; \infty[$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen von f_2 im Bereich $-3 \le x \le 3$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse (1 LE = 2 cm). Tragen Sie auch die Asymptoten ein.

$f_2(x) = \operatorname{atan}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ $\qquad y_0 := \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ Umkehrfunktion k^{-1}:

$x_{W1} =$	$f_2(x_{W1}) =$	$x_{W2} =$	$f_2(x_{W2}) =$	$x_u =$	$k_u(x_u) =$
-3	0.927	0.5	-0.785	-1.5	0.066
-2.5	0.951	1	0	-1	0.391
-2	0.983	1.5	0.322	-0.5	0.647
-1.5	1.03	2	0.464	0	1
-1	1.107	2.5	0.54	0.5	2.204
-0.5	1.249	3	0.588		



Teilaufgabe 1.5 (5 BE)

Begründen Sie, dass die Funktion k mit $k(x) = f_2(x)$ und $D_k = IR^+$ umkehrbar ist und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von k^{-1} im Punkt P(0/?).

Zeichnen Sie den Graphen von k^{-1} und die Tangente t in das Koordinatensystem von Aufgabe 1.4 ein.

$$k(x) := \arctan\left(1 - \frac{1}{x}\right) \qquad k'(x) := \frac{2}{4\cdot x^2 - 4\cdot x + 2}$$

G_k ist für $x > 0$ streng monoton steigend, also umkehrbar

Bestimmung von y_P: $\quad \arctan\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Punkt (1/0) $\in G_k$ und Punkt (0/1) $\in G_{k^{-1}}$

Steigung in P: $\quad \left(k^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{k'(1)} = \frac{2}{4 - 4 + 2} = 1$

Tangente: $\quad t(x) = 1\cdot(x - 0) + 1 \qquad t(x) = x + 1$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist weiter die Funktion $g(x) = \dfrac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = IR_0^+$.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von g.

[Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{2 - e^x}{2\cdot e^x\cdot\sqrt{e^x - 1}}$]

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\,e^x\cdot e^x - \sqrt{e^x - 1}\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x - 2\cdot\left(e^x - 1\right)}{2\cdot\sqrt{e^x - 1}\cdot e^x} = \frac{e^x - 2\cdot e^x + 2}{2\cdot e^x\cdot\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2 - e^x}{2\cdot e^x\cdot\sqrt{e^x - 1}}$$

Horizontale Tangenten: $\quad g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(2)$

nicht definiert	$x = 0$	$x = \ln(2)$	
Zähler	pos		neg
Nenner	pos		pos
g '(x)	pos		neg
G_g	sms		smf
		HP	

$$g(\ln(2)) = \frac{\sqrt{e^{\ln(2)} - 1}}{e^{\ln(2)}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ relativer Hochpunkt $\left(\ln(2), \frac{1}{2}\right)$

$$g(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Randminimum $(0, 0)$

Teilaufgabe 2.2 **(7 BE)**

Zeigen Sie, dass für $x > 0$ folgende Beziehung für g(x) erfüllt ist: $g(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x - 1}} - g'(x)$,

und ermitteln Sie damit eine Stammfunktion von g.

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x - 1}} - \frac{2 - e^x}{2\cdot e^x\cdot\sqrt{e^x - 1}} = \frac{e^x - 2 + e^x}{2\cdot e^x\cdot\sqrt{e^x - 1}} = \frac{e^x - 1}{e^x\cdot\sqrt{e^x - 1}} = \frac{\left(e^x - 1\right)\cdot\sqrt{e^x - 1}}{e^x\cdot\left(e^x - 1\right)} = \blacksquare$$

$$\ldots = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x} = g(x)$$

$$\int g(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x - 1}} - g'(x)\right) dx = \int \frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x - 1}}\,dx - g(x) + c$$

Nebenrechnung: $\displaystyle\int \frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x - 1}}\,dx$

Substitution: $z = \sqrt{e^x - 1}$ $\qquad z^2 = e^x - 1$ $\qquad e^x = z^2 + 1$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x - 1}} \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{2\cdot\sqrt{e^x - 1}}{e^x}\cdot dz \quad\Leftrightarrow\quad dx = \frac{2\cdot z}{z^2 + 1}\cdot dz$$

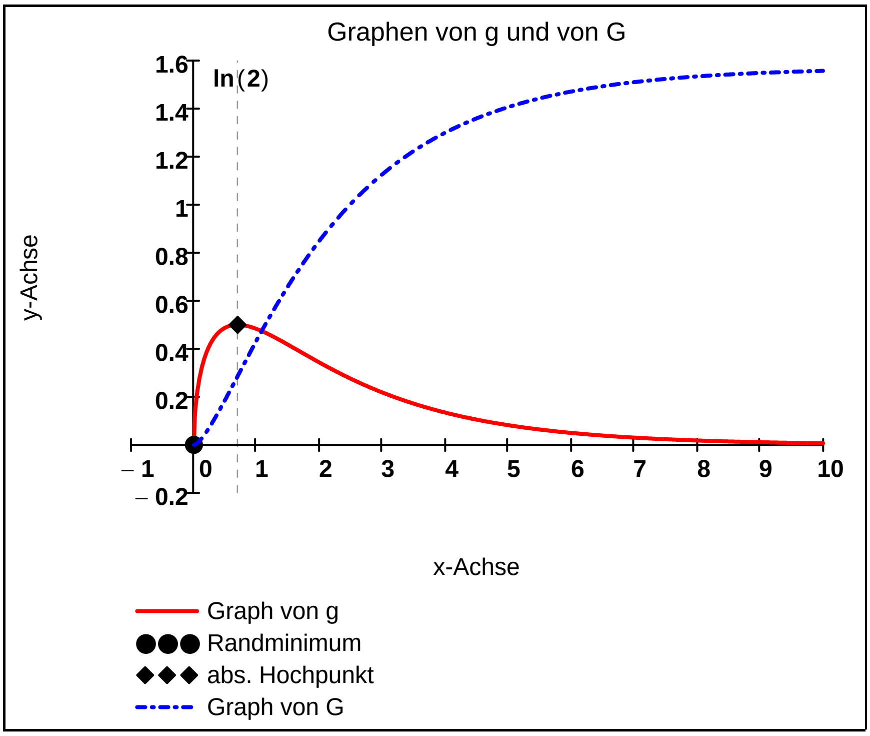
$$\int \frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int \frac{1}{2\cdot z}\cdot\frac{2\cdot z}{z^2+1}\,dz = \int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \arctan(z) = \arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)$$

Stammfunktion:

$$G(x) = \arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x} + c$$

Folgende graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt:

$$g(x) := \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x} \qquad G(x) := \arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x}$$



Teilaufgabe 3.0
Gegeben ist nun die Funktion $h(x) = x \cdot \sqrt{\sin(x)}$ mit $D_h = [\,0\,;\,\pi\,]$.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Ermitteln Sie die Nullstellen von h und das Verhalten von $h'(x)$ für $x \to \pi$. Welche Bedeutung hat dieses für den Graphen von h?

Funktionsterm: $h(x) = x \cdot \sqrt{\sin(x)}$

Nullstellen: $h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \sqrt{\sin(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow$

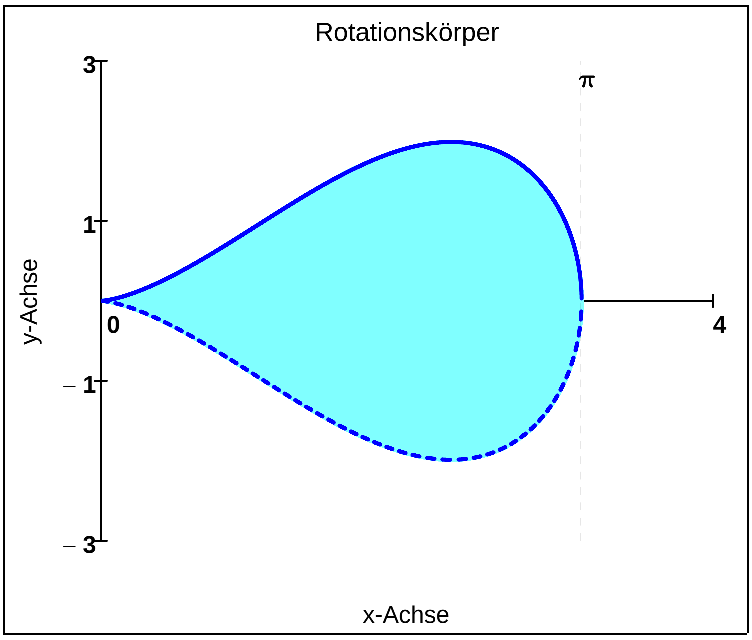
$x_1 = 0 \vee \sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0 \quad x_3 = \pi$

Ableitungsfunktion: $h'(x) = 1 \cdot \sqrt{\sin(x)} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} \cdot \cos(x) = \frac{2 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)}{2 \cdot \sqrt{\sin(x)}}$

$$\lim_{x \to \pi^-} \left(\frac{2 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)}{2 \cdot \sqrt{\sin(x)}} \right) \to -\infty$$

$\Rightarrow$ G_h mündet senkrecht bei $x = \pi$ in die x-Achse.

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)
Bei der Rotation des Graphen von h um die x-Achse entsteht ein *tropfenförmiger* Drehkörper. Berechnen Sie die Maßzahl V seines Volumeninhalts.



Volumen des Raumkörpers:

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(x)\, dx$$

Berechnung der Stammfunktion von: $\int x^2 \cdot \sin(x)\, dx$

Partielle Integration: $u(x) = x^2$ $\quad u'(x) = 2 \cdot x$

$v'(x) = \sin(x)$ $\quad v(x) = -\cos(x)$

$$\Rightarrow \quad \int x^2 \cdot \sin(x)\, dx = x^2 \cdot (-\cos(x)) + \int \cos(x) \cdot 2 \cdot x\, dx$$

Berechnung der Stammfunktion von: $\int \cos(x) \cdot 2 \cdot x\, dx$

Partielle Integration: $u(x) = 2 \cdot x$ $\quad u'(x) = 2$

$v'(x) = \cos(x)$ $\quad v(x) = \sin(x)$

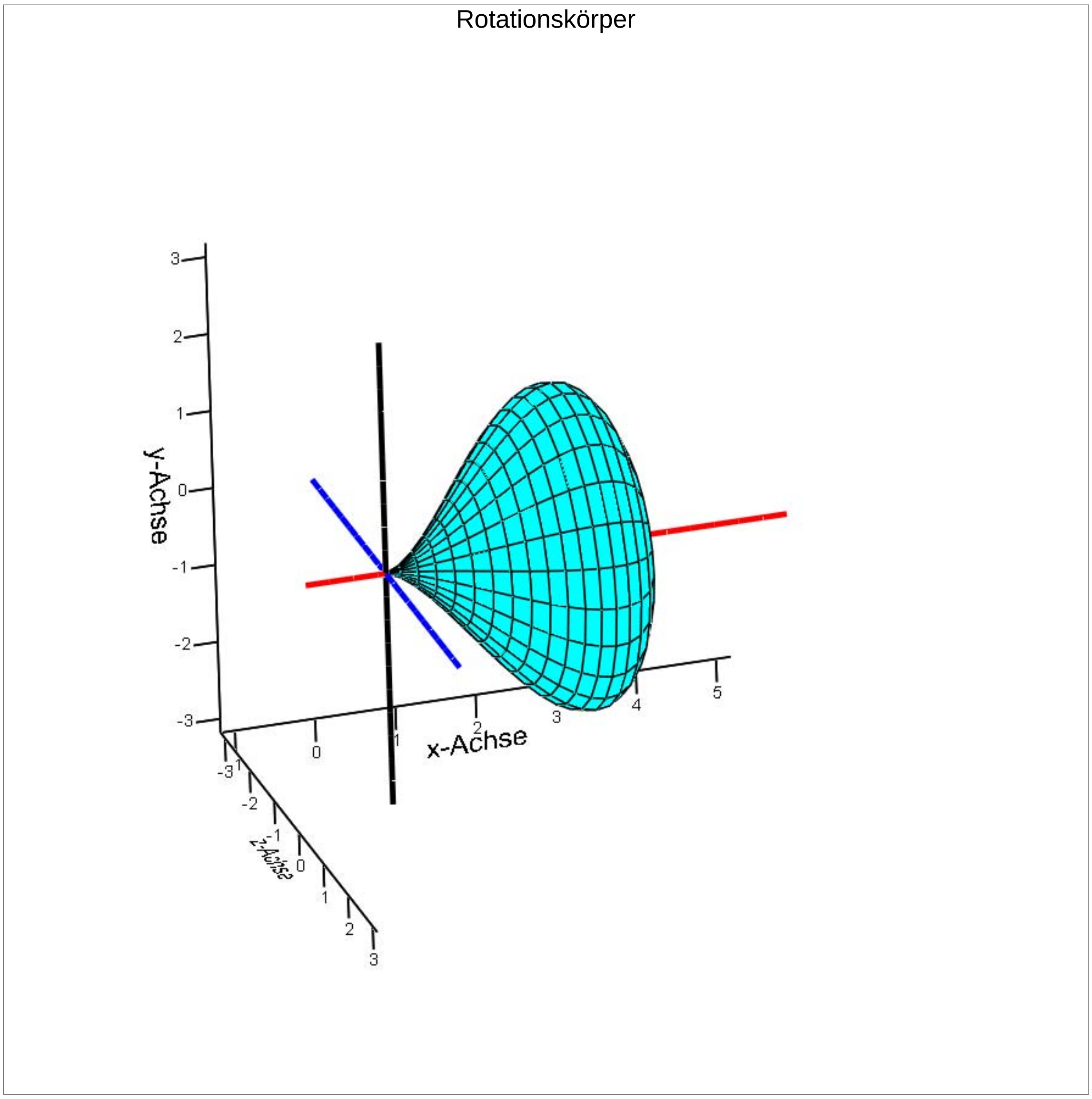
$$\Rightarrow \quad \int \cos(x) \cdot 2 \cdot x\, dx = 2 \cdot x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) \cdot 2\, dx = 2 \cdot x \cdot \sin(x) - (-\cos(x) \cdot 2)$$

$$\int x^2 \cdot \sin(x)\, dx = -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)$$

$$H(x) := -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)$$

Volumen: $V_x := \pi \cdot (H(\pi) - H(0)) = \pi^3 - 4 \cdot \pi$

Definitionen



Teilaufgabe 4 (8 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\left(x^2+4\right)\cdot y' = -8\cdot x\cdot y + 2\cdot x$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.

Inhomogene DGL: $y' + \dfrac{8\cdot x}{x^2+4}\cdot y = \dfrac{2\cdot x}{x^2+4}$

Homogene DGL: $y' + \dfrac{8\cdot x}{x^2+4}\cdot y = 0$

Triviale Lösung: $y = 0$

Im Folgenden: $y \neq 0$

Differentialquotient: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{8\cdot x}{x^2+4}\cdot y$

Trennen der Variablen: $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{8\cdot x}{x^2+4}\cdot dx$

Integration: $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{8\cdot x}{x^2+4}\,dx + k \rightarrow \ln(|y|) = k - 4\cdot\ln\left(x^2+4\right)$

Auflösen des Betrags:

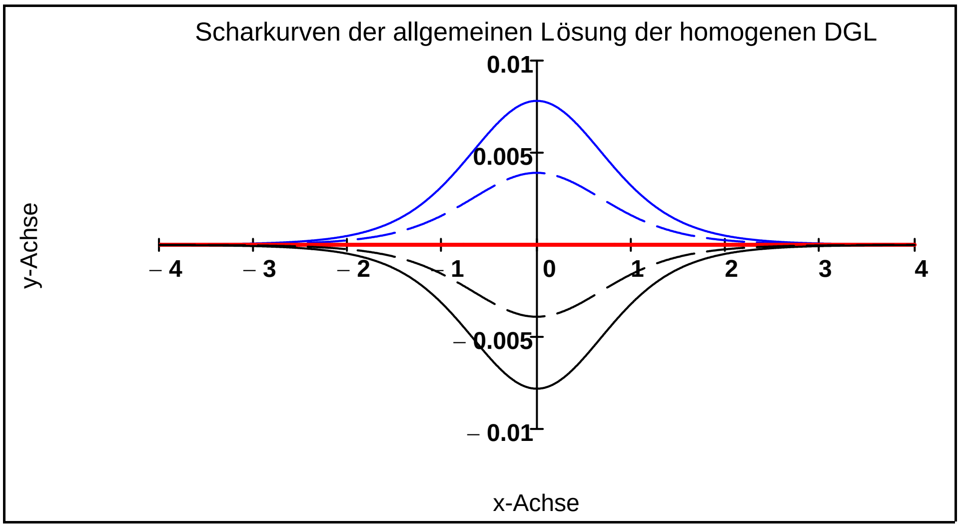
$y > 0$ $\quad y = e^{\left(k-4\cdot\ln\left(x^2+4\right)\right)} = K_1\cdot\dfrac{1}{\left(x^2+4\right)^4}$ $\quad$ mit $K_1 = e^k$

$y < 0$ $\quad y = -e^{\left(k-4\cdot\ln\left(x^2+4\right)\right)} = -K_2\cdot\dfrac{1}{\left(x^2+4\right)^4}$ $\quad$ mit $K_2 = e^k$

Zusammenfassung inklusive trivialer Lösung: $y_H(x) = \dfrac{K}{\left(x^2+4\right)^4}$

In der Prüfung nicht verlangt:

Kurvenschar: $$y_S(x,K) := \frac{K}{\left(x^2+4\right)^4}$$



Variation der Konstanten: $$y_S(x) = \frac{K(x)}{\left(x^2+4\right)^4}$$

$$y'_S(x) = \frac{K'(x)\cdot\left(x^2+4\right)^4 - K(x)\cdot 4\cdot\left(x^2+4\right)^3\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+4\right)^8} = \frac{K'(x)\cdot\left(x^2+4\right) - 8\cdot x\cdot K(x)}{\left(x^2+4\right)^5}$$

Einsetzen in inhomogene DGL: $$y' + \frac{8\cdot x}{x^2+4}\cdot y = \frac{2\cdot x}{x^2+4}$$

$$\frac{K'(x)\cdot\left(x^2+4\right) - 8\cdot x\cdot K(x)}{\left(x^2+4\right)^5} + \frac{8\cdot x}{x^2+4}\cdot\frac{K(x)}{\left(x^2+4\right)^4} = \frac{2\cdot x}{x^2+4} \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{K'(x)}{\left(x^2+4\right)^4} = \frac{2\cdot x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \qquad K'(x) := 2\cdot x\cdot\left(x^2+4\right)^3$$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad K(x) := \int 2\cdot x\cdot\left(x^2+4\right)^3\,dx = \frac{\left(x^2+4\right)^4}{4}$$

Spezielle Lösung des inhomogenen Systems:

$$y_S(x) := \frac{\left(x^2+4\right)^4}{4} \cdot \frac{1}{\left(x^2+4\right)^4} \qquad y_S(x) = \frac{1}{4}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$y_A(x, K) := \frac{K}{\left(x^2+4\right)^4} + \frac{1}{4}$$