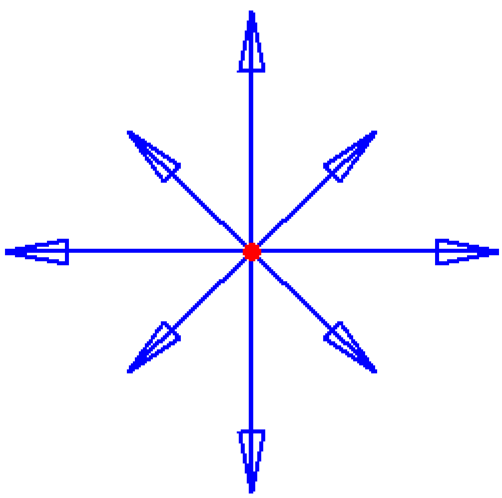
mathphys-online

Lineare Algebra



Inhaltsverzeichnis

Kapitel	Inhalt	Seite
1	**Vektoren in der Ebene und im Raum**	1
	1.1 Der Begriff des Vektors	1
	1.2 Beschreibung im Koordinatensystem	2
	1.3 Rechenoperationen mit Vektoren (Vektoralgebra)	3
	1.3.1 Vervielfachen von Vektoren	3
	1.3.2 Addition von Vektoren	3
	1.3.3 Subtraktion von Vektoren	4
	1.3.4 Das Assoziativgesetz bzgl. der Verknüpfung Addition	4
	1.3.5 Das Kommutativgesetz bzgl. der Verknüpfung Addition	5
	1.3.6 Das Assoziativgesetz bzgl. der Verknüpfung Multiplikation	6
	1.3.7 Das Distributivgesetz 1	6
	1.3.8 Das Distributivgesetz 2	6
	1.4 Geometrische Anwendungen mit Vektoren	7
	1.4.1 Länge eines Ortsvektors	7
	1.4.2 Länge eines Verbindungsvektors	7
	1.4.3 Mittelpunkt einer Strecke	8
	1.4.4 Schwerpunkt eines Dreiecks	10
2	**Produkte von Vektoren**	13
	2.1 Das Skalarprodukt	13
	2.1.1 Herleitung	
	2.1.2 Winkel zwischen Vektoren	13
	2.1.3 Senkrechte Projektion	16
	2.2 Das Vektorprodukt	17
	2.2.1 Flächenberechnung	17
	2.2.2 Koordinatenschreibweise im IR^2	17
	2.2.3 Koordinatenschreibweise im IR^3	18
	2.2.4 Definition des Vektorproduktes	18
	2.2.5 Geometrische Interpretation	19
	2.2.6 Eigenschaften des Vektorproduktes	20
	2.3 Spatprodukt und Spatvolumen	21
	2.3.1 Das Cavalierische Prinzip	21
	2.3.2 Das schiefe Prisma	21
	2.3.3 Das Spatprodukt	22
	2.3.4 Volumenberechnungen	24

Graphiken erstellt mit Mathcad 15

1 Vektoren in der Ebene und im Raum

Im Bereich der Naturwissenschaften (Physik, Technologie,...) ist es bei vielen Größen notwendig, die Richtung anzugeben.

Beispiele für ungerichtete Größen	**Beispiele für gerichtete Größen**
Masse m Zeit t Temperatur T Energie E Elektrische Spannung U Ladung Q Stromstärke I	Kraft $\vec{F}$ Weg $\vec{x}$ Geschwindigkeit $\vec{v}$ Beschleunigung $\vec{a}$ Elektrische Feldstärke $\vec{E}$

Man unterscheidet

◆ **gerichtete Größen**, die allein durch ***Maßzahl*** und ***Einheit*** beschrieben werden: ***Skalare***

◆ **gerichtete Größen**, die eine **feste *Richtung*** haben: ***Vektoren***

Diese Größen können in einem Koordinatensystem veranschaulicht werden.
Das Arbeiten im Koordinatensystem ist oft recht unübersichtlich, deshalb wurde der Begriff des Vektors ein wichtiges *Werkzeug*, um das Rechnen mit Koordinatenwerten zu vereinfachen.

1.1 Der Begriff des Vektors

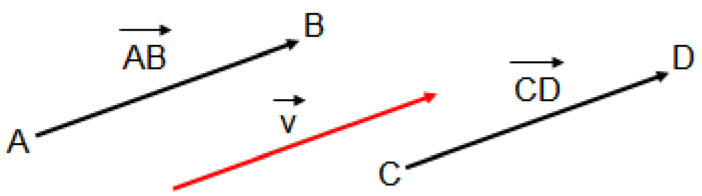
<u>Definition</u>

Ein ***Vektor*** $\vec{v}$ ist ein mathematisches Objekt, das eine Parallelverschiebung in der Ebene oder im Raum beschreibt.

<u>Bezeichnung</u>

Bezeichnet man die Menge aller zu einem Pfeil gleich langer und gleich orientierter Pfeile mit $\vec{v}$, und ist der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ vom Punkt A zum Punkt B ein Element dieser Menge, dann nennt man den Pfeil $\overrightarrow{AB}$ einen ***Repräsentanten*** der Menge $\vec{v}$. Der Punkt A heißt ***Anfangspunkt*** und der Punkt B ***Spitze*** des Pfeils $\overrightarrow{AB}$.

Gehören zwei Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ zu derselben Pfeilmenge $\vec{v}$, so schreibt man statt $\overrightarrow{AB} \in \vec{v}$ und $\overrightarrow{CD} \in \vec{v}$ direkt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Das heißt, dass die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ gleich lang und gleich orientiert sind und sich höchstens durch eine Parallelverschiebung unterscheiden.



1.2 Beschreibung im Koordinatensystem

Mithilfe eines ***rechtsorientierten*** Koordinatensystems wird ein Maßstab in der Geometrie festgelegt. Dabei unterscheidet man im Anschauungsraum Koordinatensysteme im IR^2 mit x_1- und x_2-Achse bzw. im IR^3 mit x_1-, x_2- und x_3-Achse.

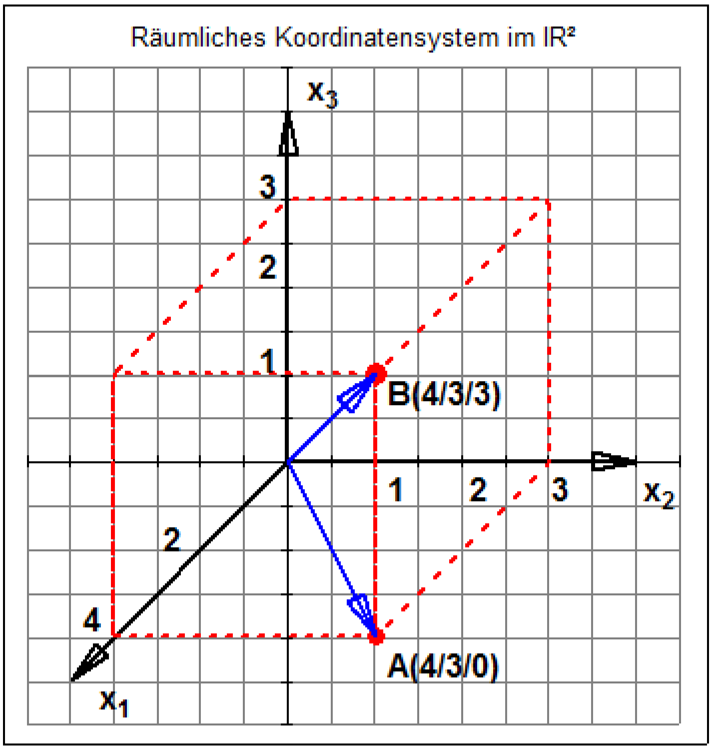
Im IR^2: Punkt $P(p_1 / p_2)$; Ortsvektor zum Punkt P: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$;

Im IR^3: Punkt $P(p_1 / p_2 / p_3)$; Ortsvektor zum Punkt P: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$;

Bei der Darstellung eines räumlichen Koordinatensystems in der Zeichenebene zeichnet man die positive x_1-Achse (aus der Zeichenebene heraus orientiert) in einem Winkel von 225° gegenüber der positiven x_2-Achse und die x_3-Achse senkrecht zur x_2-Achse. Die Einheit auf der x_1-Achse zeichnet man im Vergleich zu der Einheit auf der x_2- und x_3-Achse verkürzt (z. B. halber Maßstab).

<u>Beispiel</u>

Die Punkte $A(4/3/0)$ und $B(4/3/3)$ sowie die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sollen in ein räumliches Koordinatensystem eingetragen werden.



1.3 Rechenoperationen mit Vektoren (Vektoralgebra)

1.3.1 Vervielfachen von Vektoren

Die ***Skalarmultiplikation*** $\lambda \cdot \vec{v}$ ist die Multiplikation eines Vektors $\vec{v}$ mit einem Skalar $\lambda \in IR$.

In Koordinatenschreibweise:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

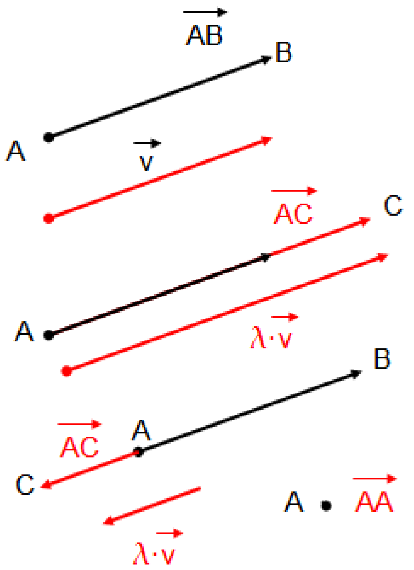
$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}$ ist ein Vektor, der die λ-fache Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ hat.

$\lambda > 0$: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ gleich orientiert

$\lambda < 0$: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ entgegengesetzt orientiert

$\lambda = 0$: $0 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \cdot v_1 \\ 0 \cdot v_2 \\ 0 \cdot v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ ***Nullvektor***



1.3.2 Addition von Vektoren

Setze an die Spitze von $\vec{a}$ den Anfang von $\vec{b}$.
Der ***Summenvektor*** $\vec{a} + \vec{b}$ geht von Anfang $\vec{a}$ bis Spitze $\vec{b}$.

In Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

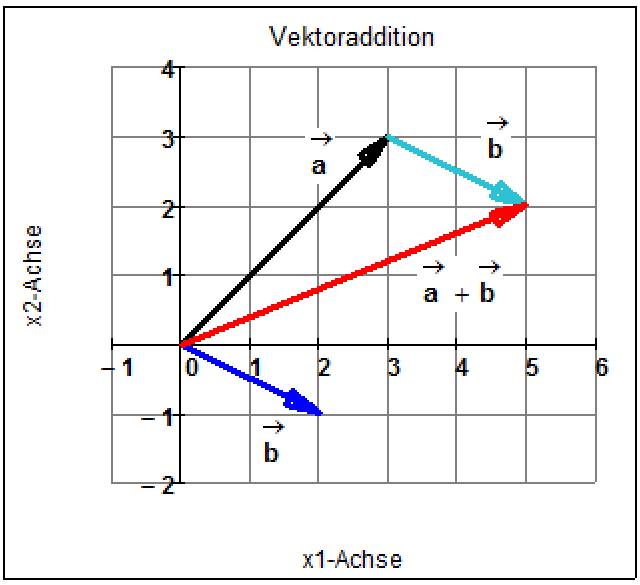
<u>Beispiel</u>

Gegeben sind die Vektoren

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Tragen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie den Summenvektor $\vec{u}$ als Ortsvektoren (Beginn im Koordinatenursprung) in das Koordinatensystem ein.
b) Berechnen Sie den Summenvektor und vergleichen Sie mit der Graphik.

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$



1.3.3 Subtraktion von Vektoren

Setze an die Spitze von $\vec{a}$ den Anfang des ***Gegenvektors*** $-\vec{b}$ von $\vec{b}$.
Der ***Differenzvektor*** $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}$ geht von Anfang $\vec{a}$ bis Spitze $-\vec{b}$.

In Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b_1\\-b_2\\-b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$$

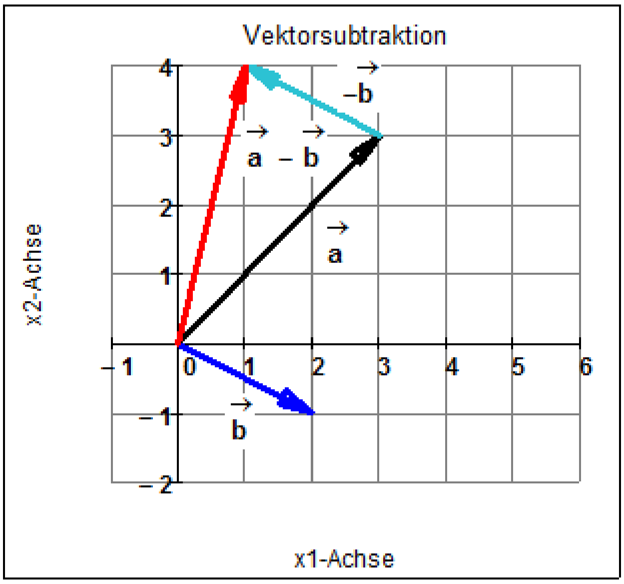
Beispiel

Gegeben sind die Vektoren

$\vec{a}=\overline{OA}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\overline{OB}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

a) Tragen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie den Differenzvektor $\vec{v}$ als Ortsvektoren (Beginn im Koordinatenursprung) in das Koordinatensystem ein.
b) Berechnen Sie den Summenvektor und vergleichen Sie mit der Graphik.

$$\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$



1.3.4 Das Assoziativgesetz bzgl. der Verknüpfung Addition (Verbindungsgesetz)

Betrachtet man mehrere Vektoren, so ist die Reihenfolge der Summenbildung beliebig.

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

In Koordinatenschreibweise:

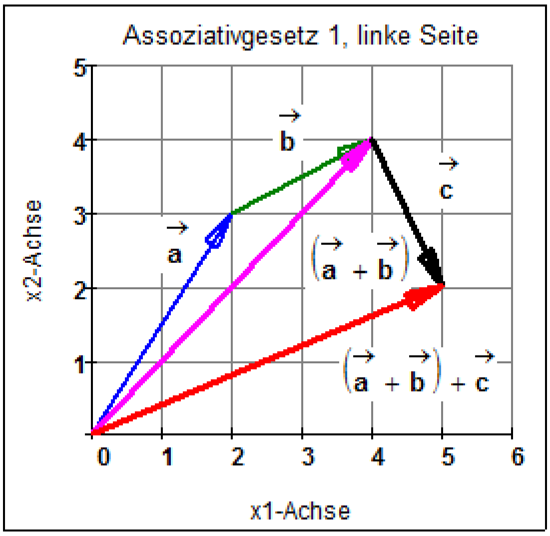
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1+c_1\\a_2+b_2+c_2\\a_3+b_3+c_3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\\b_3+c_3\end{pmatrix}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

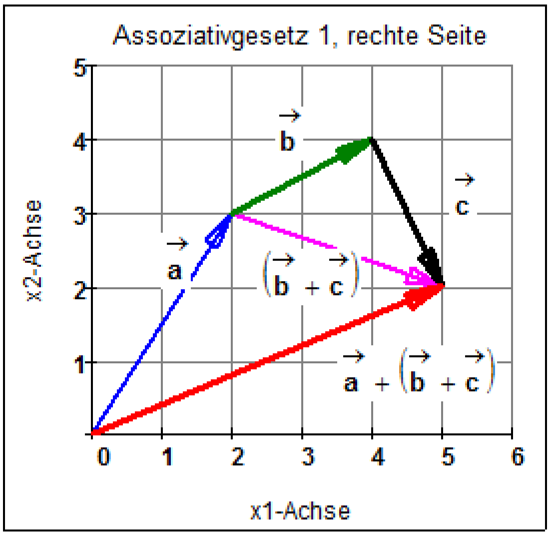
Beispiel

Gegeben sind die Vektoren

$\vec{a}=\overline{OA}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\overline{OB}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\overline{OC}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Zeigen Sie die Gültigkeit des Assoziativgesetzes durch Konstruktion der Vektoren in den jeweiligen Koordinatensystemen.





1.3.5 Das Kommutativgesetz bzgl. der Verknüpfung Addition (Vertauschungsgesetz)

Betrachtet man mehrere Vektoren, so ist die Reihenfolge der Summenbildung beliebig.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

In Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$$

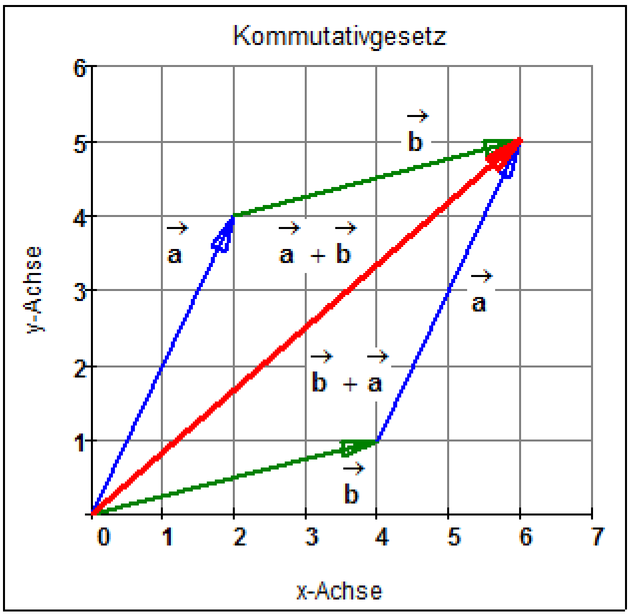
Parallelogrammregel

Beispiel

Gegeben sind die Vektoren

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie die Gültigkeit des Kommutativgesetzes durch Konstruktion der beiden Summenvektoren.



1.3.6 Das Assoziativgesetz bzgl. der Verknüpfung Multiplikation mit einem Skalar

Wird ein Vektor $\vec{a}$ mit einem Faktor λ multipliziert und dieser Vektor mit einem Faktor μ, so ergibt sich derselbe Vektor, wenn man den Vektor $\vec{a}$ mit dem Produkt aus beider Faktoren multipliziert.

$$\lambda\cdot\left(\mu\cdot\vec{a}\right)=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a} \text{ mit } \lambda,\, \mu\in\mathrm{IR}\setminus\{0\}$$

In Koordinatenschreibweise:

$$\lambda\cdot\left(\mu\cdot\vec{a}\right)=\lambda\cdot\left(\mu\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right)=\lambda\cdot\begin{pmatrix}\mu\cdot a_1\\\mu\cdot a_2\\\mu\cdot a_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda\cdot\mu\cdot a_1\\\lambda\cdot\mu\cdot a_2\\\lambda\cdot\mu\cdot a_3\end{pmatrix}=(\lambda\cdot\mu)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}$$

1.3.7 Distributivgesetz 1 (Verteilungsgesetz)

Multipliziert man die Summe zweier Vektoren mit einem Skalar ist das identisch mit der Summe der beiden mit dem Skalar multiplizierten Vektoren.

Kurz: ***Ausmultiplizieren oder Ausklammern des Skalars***

$$\lambda\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b} \text{ mit } \lambda\in\mathrm{IR}$$

In Koordinatenschreibweise:

$$\lambda\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\cdot\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda\cdot(a_1+b_1)\\\lambda\cdot(a_2+b_2)\\\lambda\cdot(a_3+b_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_1+\lambda\cdot b_1\\\lambda\cdot a_2+\lambda\cdot b_2\\\lambda\cdot a_3+\lambda\cdot b_3\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_1\\\lambda\cdot a_2\\\lambda\cdot a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda\cdot b_1\\\lambda\cdot b_2\\\lambda\cdot b_3\end{pmatrix}\right)=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$$

1.3.8 Distributivgesetz 2

Multipliziert man die Summe zweier Skalare mit einem Vektor ist das identisch mit der Summe der beiden mit dem Vektor multiplizierten Skalare.

Kurz: ***Ausmultiplizieren oder Ausklammern des Vektors***

$$(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a} \text{ mit } \lambda,\, \mu\in\mathrm{IR}\,.$$

In Koordinatenschreibweise:

$$(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=(\lambda+\mu)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda+\mu)\cdot a_1\\(\lambda+\mu)\cdot a_2\\(\lambda+\mu)\cdot a_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_1+\mu\cdot a_1\\\lambda\cdot a_2+\mu\cdot a_2\\\lambda\cdot a_3+\mu\cdot a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_1\\\lambda\cdot a_2\\\lambda\cdot a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu\cdot a_1\\\mu\cdot a_2\\\mu\cdot a_3\end{pmatrix}$$

$$=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$$

1.4 Geometrische Anwendungen mit Vektoren

1.4.1 Länge eines Ortsvektors

Gesucht:

Länge des Vektors $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$.

Nebenrechnung:

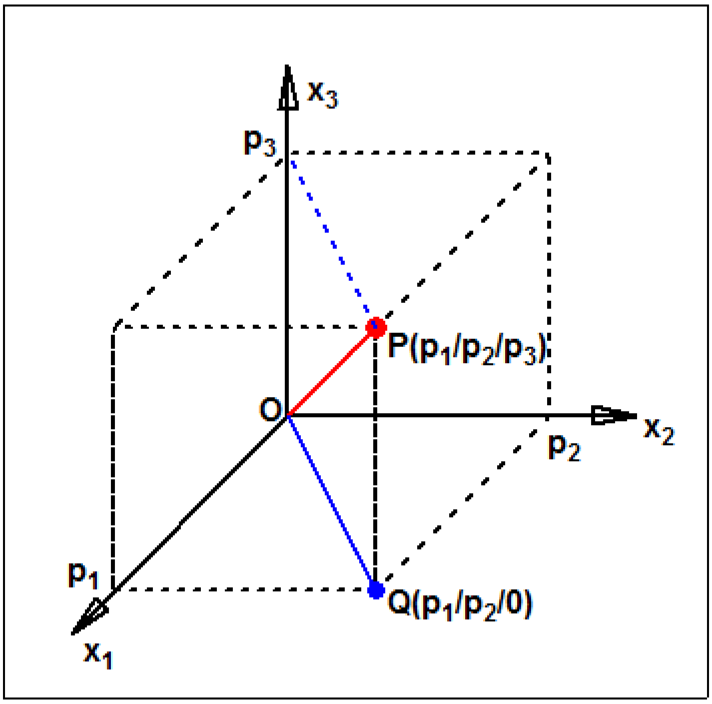
Projektion des Punktes P in die x_1-x_2-Ebene:

$$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{p_1^{\,2} + p_2^{\,2}} \quad \text{(Pythagoras)}$$

Damit gilt:

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{\left(\left|\overrightarrow{OQ}\right|\right)^2 + p_3^{\,2}}$$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{p_1^{\,2} + p_2^{\,2} + p_3^{\,2}}$$



1.4.2 Länge eines Verbindungsvektors

Gesucht:
Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

Geschlossene Vektorkette:

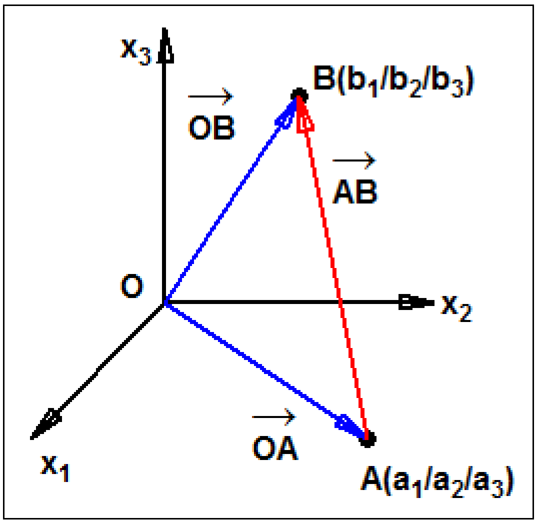
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

Auflösen:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

In Koordinatenschreibweise:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

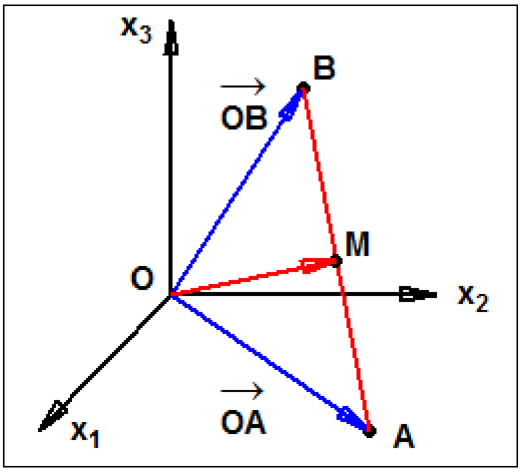
Merkregel: ***Spitze minus Fuß***

1.4.3 Mittelpunkt einer Strecke

Gegeben sind die Punkte $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$.

Gesucht ist der Mittelpunkt der Strecke [AB].

Lösung



Geschlossene Vektorkette:

$$\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OM}=\vec{0}$$

Auflösen:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$

Vereinfachen:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$

Satz

Für den Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ des Mittelpunktes M einer Strecke [AB] mit den zugehörigen Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ gilt:

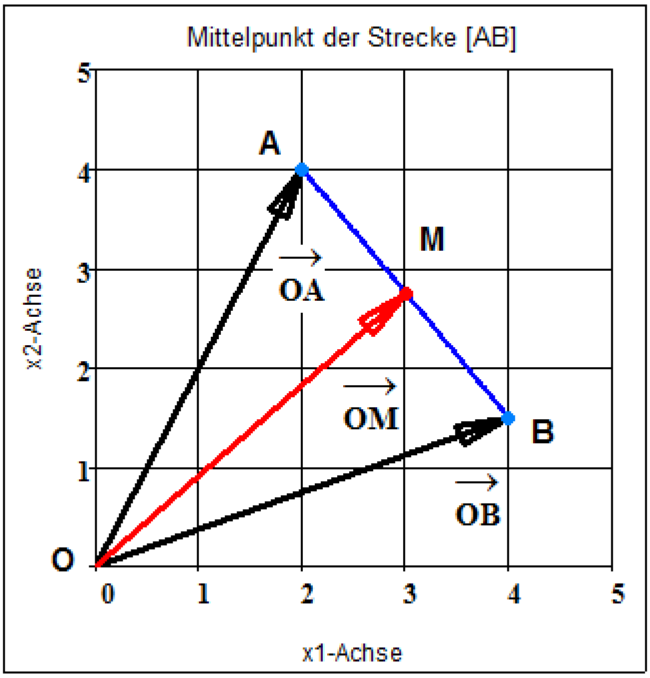
$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)}$$

Beispiel 1

Durch die Punkte $A(2/4)$ und $B(4/1{,}5)$ wird eine Strecke [AB] festgelegt.

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke [AB].

b) Bestimmen Sie den Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ und die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke [AB].



Lösung

a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\1{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2{,}5\end{pmatrix}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2{,}5)^2}=3{,}20$$

b) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1{,}5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\2{,}75\end{pmatrix}$

$M(3/2{,}75)$

Beispiel 2

Durch die Punkte $A(2/4/3)$ und $B(4/1{,}5/2)$ wird eine Strecke [AB] festgelegt.

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke [AB].

b) Bestimmen Sie den Ortsvektor $\overrightarrow{OM}$ und die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke [AB].

Lösung

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-2{,}5)^2 + (-1)^2} = 3{,}35$;

b) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}75 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$; $\quad M(3/2{,}75/2{,}5)$;

Beispiel 3

Durch die Punkte $A(1/2)$, $B(5/1)$ und $C(7/3)$ sind drei Ecken des Parallelogramms ABCD gegeben.

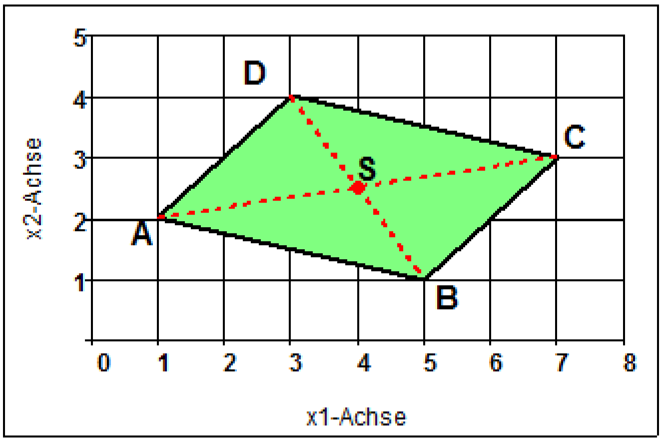
a) Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes D.

b) Tragen Sie die Diagonalen ein und lesen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts ab.

c) Zeigen Sie durch allgemeine Rechnung mit Hilfe geschlossener Vektorketten, dass sich die Diagonalen des Parallelogramms halbieren.

d) Überprüfen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes S durch Rechnung.

Lösung



a) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad D(3/4)$

b) $S(4/2{,}5)$

c) Geschlossene Vektorkette BSAB:

$\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$; (1)

Punkt S auf der Diagonalen AC: $\overrightarrow{AS} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$; (2)

Punkt S auf der Diagonalen DB: $\overrightarrow{BS} = \mu \cdot \overrightarrow{BD} = \mu \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$; (3)

(2) und (3) einsetzen in (1): $\mu \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) - \lambda \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$;

Umordnen und Zusammenfassen: $(\mu - \lambda) \cdot \overrightarrow{AD} + (-\mu - \lambda + 1) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$;

Da $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ und $\overrightarrow{AD} \neq \vec{0}$ muss gelten: (1) $\mu - \lambda = 0$; (2) $-\mu - \lambda + 1 = 0$;

Aus (1) $\lambda = \mu$; In (2) einsetzen: $-\lambda - \lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{2}$; In (1) einsetzen: $\mu = \frac{1}{2}$;

d) Mittelpunkt auf der Diagonalen AC: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(4/2{,}5)$

Mittelpunkt auf der Diagonalen BD: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Satz

Die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren sich.

Beispiel 4

Durch die Punkte $A(1/2/4)$, $B(5/1/2)$, $C(7/3/1)$ und $D(3/4/3)$ sind die Ecken des Parallelogramms ABCD gegeben.
Bestimmen Sie den Ortsvektor und die Koordinaten des Mittelpunktes durch Rechnung.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

1.4.4 Schwerpunkt eines Dreiecks

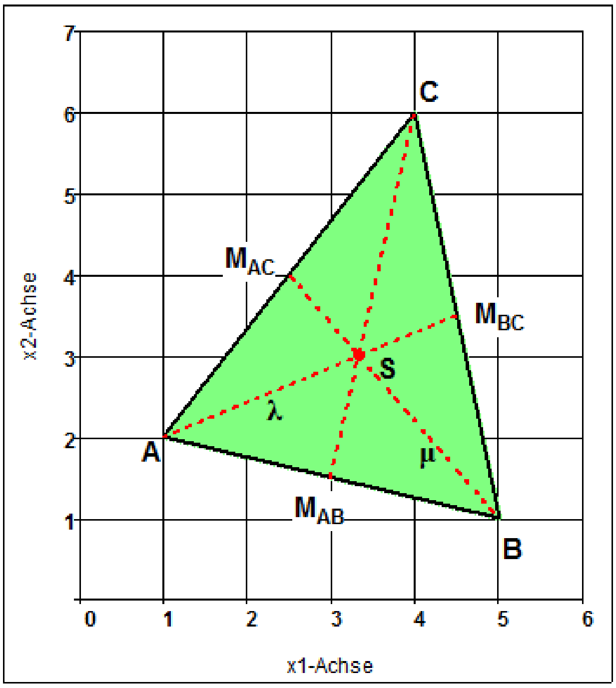
Beispiel 5

Durch die Punkte $A(1/2)$, $B(5/1)$ und $C(4/6)$ ist ein Dreieck gegeben.

a) Tragen Sie die drei Seitenhalbieren den (***Schwerlinien***) ein.

b) Bestimmen Sie durch Rechnung mit Hilfe geschlossener Vektorketten, in welchem Verhältnis sich die Schwerlinien teilen.

c) Bestimmen Sie den Ortsvektor und die Koordinaten des Schwerpunktes S.



Lösung zu b)

Geschlossene Vektorkette BCAB:

$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Für die Seitenhalbierenden gilt:

$$\overrightarrow{AM_{BC}} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\overrightarrow{AM_{BC}} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC};\ (1)$$

$$\overrightarrow{BM_{AC}} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC};\ (2)$$

Die Seitenhalbierenden schneiden sich: $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

S Ist Teilpunkt von $\overrightarrow{AM_{BC}}$ und $\overrightarrow{BM_{AC}}$:

$\lambda\cdot\overrightarrow{AM_{BC}} - \mu\cdot\overrightarrow{BM_{AC}} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (3)

Gleichungen (1) und (2) in (3) einsetzen:

$$\lambda\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}\right) - \mu\cdot\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Ordnen: $\left(\frac{\lambda}{2} + \mu - 1\right)\cdot\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}\right)\cdot\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Da $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ und $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ muss gelten:

(1) $\frac{\lambda}{2} + \mu - 1 = 0$; (2) $\frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} = 0$;

Aus (2) $\lambda = \mu$; in (1) $\frac{\lambda}{2} + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}; \quad \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}$;

$$\frac{\left|\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\overrightarrow{SM_{BC}}\right|} = \frac{\lambda\cdot\left|\overrightarrow{AM_{BC}}\right|}{(1-\lambda)\cdot\left|\overrightarrow{AM_{BC}}\right|} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{1};$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{BS}\right|}{\left|\overrightarrow{SM_{AC}}\right|} = \frac{\mu\cdot\left|\overrightarrow{BM_{AC}}\right|}{(1-\mu)\cdot\left|\overrightarrow{BM_{AC}}\right|} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{1};$$

d h. die ***Schwerlinien teilen sich im Verhältnis 2:1.***

Die Berechnung der Teilverhältnisse $\frac{\left|\overrightarrow{CS}\right|}{\left|\overrightarrow{SM_{AB}}\right|}$ und $\frac{\left|\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\overrightarrow{SM_{BC}}\right|}$ bzw. $\frac{\left|\overrightarrow{CS}\right|}{\left|\overrightarrow{SM_{AB}}\right|}$ und $\frac{\left|\overrightarrow{BS}\right|}{\left|\overrightarrow{SM_{AC}}\right|}$

erfolgt analog.

Lösung zu c)

Ortsvektor zum Schwerpunkt:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_{BC}} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OM_{BC}} - \overrightarrow{OA} \right) = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Koordinaten des Schwerpunktes: $S\left(\frac{10}{3} / 3 \right)$

Satz

Für den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ des Schwerpunktes S des Dreiecks ABC mit den zugehörigen Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ gilt:

$$\boxed{\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right)}$$

Beispiel 6

Durch die Punkte $A(1/2/5)$, $B(5/1/3)$ und $C(4/6/1)$ ist ein Dreieck gegeben.
Bestimmen Sie durch Rechnung den Ortsvektor und die Koordinaten des Schwerpunktes S.

Lösung

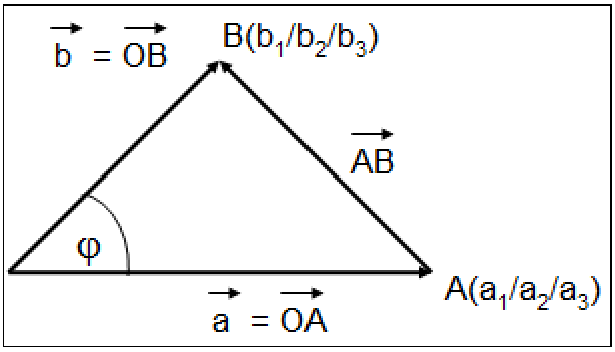
Ortsvektor zum Schwerpunkt:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Koordinaten des Schwerpunkts: $S\left(\frac{10}{3} / 3 / 3 \right)$

2 Produkte von Vektoren

2.1 Das Skalarprodukt



Das ***Skalarprodukt zweier Vektoren*** im Anschauungsraum hängt von der Länge der Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel φ ab. Zur Berechnung verwendet man den Kosinussatz (verallgemeinerter Pythagoras für die Seite AB, vgl. Merkhilfe):

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi)$$

Die Längen (Beträge) der Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$ werden aus den Koordinaten berechnet:

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi)$$

Nach dem Ausmultiplizieren fallen die Quadrate auf beiden Seiten weg:

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi)$$

Danach wird die Gleichung durch (-2) dividiert:

$$\underbrace{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}_{\text{Abkürzung } \vec{a}\circ\vec{b}} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi) \qquad (*)$$

Weil das Symbol $\circ$ an ein Produkt erinnert, definiert man das

Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:folgendermaßen:

$$\boxed{\vec{a}\circ\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3} \qquad (**)$$

Da $(*) = (**)$ gilt auch: $\boxed{\vec{a}\circ\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi)} \qquad (***)$

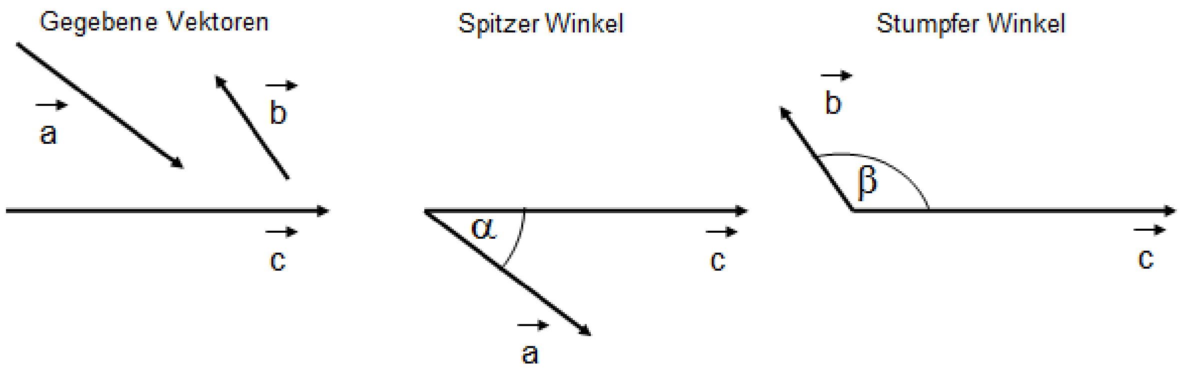
2.2 Winkel zwischen Vektoren

Gleichung $(***)$ auflösen: $\boxed{\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} \quad\Rightarrow\quad \varphi = \arccos\left(\dfrac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right)}$

Achtung: Taschenrechner auf ***Gradmaß*** (deg) einstellen.

Bemerkung

Mithilfe dieser Formel können spitze Winkel und stumpfe Winkel berechnet werden.
Vorgehensweise: Festlegung des Scheitels des Winkels und derjenigen ***Vektoren, die vom Scheitel wegzeigen.***



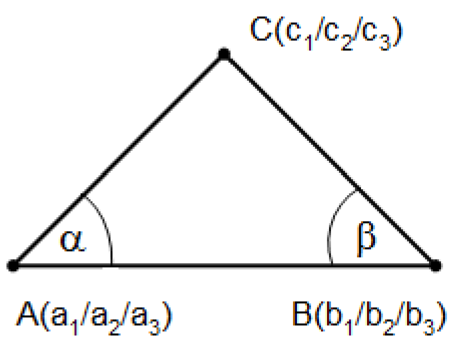
Beispiel

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Ecken

$A(1/4/1)$; $B(0/5/2)$; $C(5/1/3)$;

Gesucht: Winkel α mit A als Scheitel;
Winkel β mit B als Scheitel.

Ergebnis: $\alpha = 114°$; $\beta = 48{,}2°$



Lösung

Ortsvektoren:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

Verbindungsvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Winkelberechnung:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|}\right)$$

Konkrete Werte:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{16+9+4}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{-4-3+2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{29}}\right) = \arccos(-0{,}536) = 122{,}5°$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{25+16+1}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{5+4-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{42}}\right) = \arccos(0{,}713) = 44{,}5°$$

<u>Bezeichnungen</u>

Orthogonale Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\circ\vec{b} = 0$

Parallele Vektoren: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 0° \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

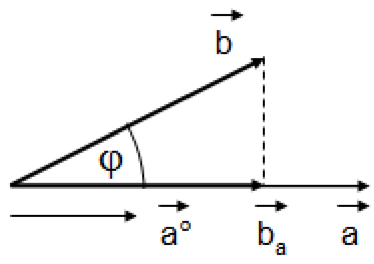
Antiparallele Vektoren: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\circ\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

<u>Beispiele</u>

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \perp \vec{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}; \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \uparrow\uparrow \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}; \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \uparrow\downarrow \vec{b}_3 = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix};$$

2.3 Senkrechte Projektion

Einheitsvektor: $\vec{a}^\circ = \dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \vec{a}^\circ$



Im Dreieck: $\cos(\varphi) = \dfrac{\left|\vec{b_a}\right|}{\left|\vec{b}\right|} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{b_a}\right| = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\varphi)$

Trick: Multiplizieren mit $\left|\vec{a}^\circ\right| = 1$:

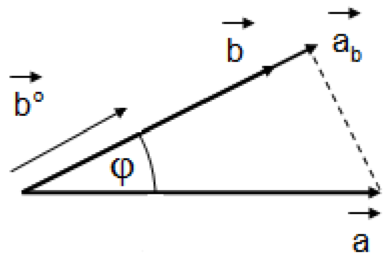
$$\left|\vec{b_a}\right| = \underbrace{\left|\vec{a}^\circ\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\varphi)}_{\text{Skalarprodukt}} = \vec{a}^\circ \circ \vec{b}$$

Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$: $\boxed{\vec{b_a} = \left(\vec{a}^\circ \circ \vec{b}\right) \cdot \vec{a}^\circ}$

Umformungen: $\vec{b_a} = \left(\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} \circ \vec{b}\right) \cdot \dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left(\left|\vec{a}\right|\right)^2} \cdot \vec{a}$

Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$:

$\boxed{\vec{a_b} = \left(\vec{b}^\circ \circ \vec{a}\right) \cdot \vec{b}^\circ}$



Umformungen: $\vec{a_b} = \left(\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} \circ \vec{a}\right) \cdot \dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left(\left|\vec{b}\right|\right)^2} \cdot \vec{b}$

<u>Beispiel</u>

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Projektionen $\vec{b_a}$ und $\vec{a_b}$.

<u>Lösung</u>

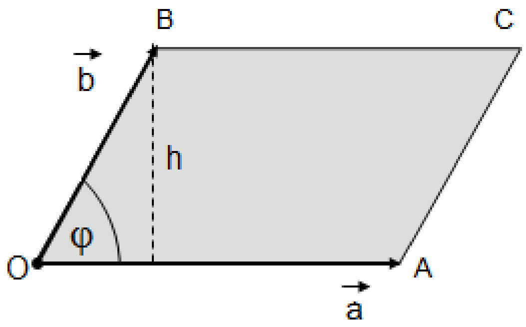
Projektion Vektor $\vec{b}$ auf $\vec{a}$: $\vec{b_a} = \left(\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{25} \cdot (4+3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{7}{25} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Projektion Vektor $\vec{a}$ auf $\vec{b}$: $\vec{a_b} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \cdot (4+3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 Das Vektorprodukt

2.2.1. Flächenberechnung

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die ein Parallelogramm aufspannen.
Gesucht ist die Fläche des Parallelogramms.



Lösung:

Es gilt: $\frac{h}{|\vec{b}|} = \sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

$$A_P = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \qquad (*)$$

Trigonometrische Umformung: $(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi) = \sqrt{1-(\cos(\varphi))^2}$

einsetzen in (*)

$$A_P = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1-(\cos(\varphi))^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \left(1-(\cos(\varphi))^2\right)}$$

$$= \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)\right)^2}$$

Trick: $|\vec{a}|^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0°) = \vec{a} \circ \vec{a}$ und ebenso: $|\vec{b}|^2 = \vec{b} \circ \vec{b}$

wird eingesetzt: $\boxed{A_P = \sqrt{(\vec{a} \circ \vec{a}) \cdot (\vec{b} \circ \vec{b}) - (\vec{a} \circ \vec{b})^2}}$ (**)

2.2.2 Koordinatenschreibweise im IR^2

$\vec{a} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2$; $\vec{b} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1^2 + b_2^2$;

$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$;

eingesetzt in (**):

$$A_P = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) - (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2)^2}$$

$$A_P = \sqrt{a_1^2 \cdot b_1^2 + a_1^2 \cdot b_2^2 + a_2^2 \cdot b_1^2 + a_2^2 \cdot b_2^2 - a_1^2 \cdot b_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2 - a_2^2 \cdot b_2^2}$$

Die Quadrate $a_i^2 \cdot b_i^2$ unter der Wurzel heben sich auf.

$$A_P = \sqrt{a_1^2 \cdot b_2^2 + a_2^2 \cdot b_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2} = \sqrt{(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2}$$

Mit der ***Determinantenschreibweise***: $\boxed{A_P = |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|}$

2.2.3 Koordinatenschreibweise im IR^3

$$\vec{a}\circ\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ ; \quad \vec{b}\circ\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \ ;$$

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \ ;$$

eingesetzt in (**):

$$A_P = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)^2}$$

Die Quadrate $a_i^2 \cdot b_i^2$ unter der Wurzel heben sich auf:

$$A_P = (a_1^2 \cdot b_2^2 + a_1^2 \cdot b_3^2 + a_2^2 \cdot b_1^2 + a_2^2 \cdot b_3^2 + a_3^2 \cdot b_1^2 + a_3^2 \cdot b_2^2 - \ldots$$
$$-2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_3 - 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot b_2 \cdot b_3)^{\frac{1}{2}}$$

zusammengefasst:

$$A_P = \sqrt{(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2 + (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)^2 + (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)^2}$$

Umordnen:

$$A_P = \sqrt{(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)^2 + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)^2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2} \qquad (***)$$

2.2.4 Definition des Vektorprodukts

Definition eines Vektors $\vec{d}$: $\quad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

Mit (***) gilt: $A_P = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$

Eigenschaften des Vektors $\vec{d}$:

(1)	$\vec{d} \perp \vec{a}$
(2)	$\vec{d} \perp \vec{b}$
(3)	$\lvert\vec{d}\rvert = A_P$

Beweis

Von (1) mit Hilfe des Skalarproduktes: $\vec{d} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{d} \circ \vec{a} = 0 \quad \wedge \quad \vec{d} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{d} \circ \vec{b} = 0$

$$\vec{d} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$= a_2 \cdot b_3 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot b_2 - a_1 \cdot b_3 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 - a_2 \cdot b_1 \cdot b_3 = 0$$

Ebenso $\vec{d} \circ \vec{a} = 0$

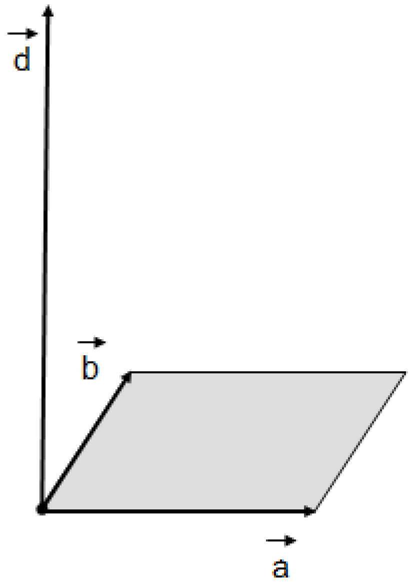
Von (2) $\left|\vec{d}\right| = \left|\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}\right|$

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)^2 + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)^2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2}$$

Mit (***) und (**) folgt: $\left|\vec{d}\right| = A_P = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})$

q. e. d

2.2.5 Geometrische Interpretation



Der Vektor $\vec{d}$ steht senkrecht auf dem durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm.

Die Länge des Vektors $\vec{d}$ entspricht der Maßzahl des Flächeninhalts des Parallelogramms.

Definition

Vektorprodukt: $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}}$ (vgl. Merkhilfe)

Merkregel zur Berechnung

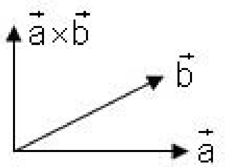
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2\\ a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3\\ a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

2.2.6 Eigenschafen des Vektorproduktes:

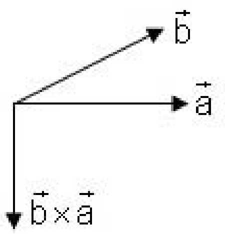
(1) $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a} \;\Leftrightarrow\; (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{a}=0 \;\wedge\; (\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b} \;\Leftrightarrow\; (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{b}=0$

(2) $A_P = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$

(3) Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $(\vec{a}\times\vec{b})$ bilden in dieser Reihenfolge ein ***Rechtssystem***.



(4) Die Vektoren $\vec{b}$, $\vec{a}$ und $(\vec{b}\times\vec{a})$ bilden in dieser Reihenfolge ein ***Linkssystem***.



Beispiel

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms, das die Vektoren aufspannen.

b) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks, das die Vektoren aufspannen.

Lösung

$$A_P = \left|\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3-4\\-(-2-5)\\8-15\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-7\\7\\-7\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-7)^2+7^2+(-7)^2} = 7\cdot\sqrt{3}$$

$$A_D = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-7\\7\\-7\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-7)^2+7^2+(-7)^2} = \frac{7}{2}\cdot\sqrt{3}$$

2.3 Spatprodukt und Spatvolumen

2.3.1 Das Cavalierische Prinzip

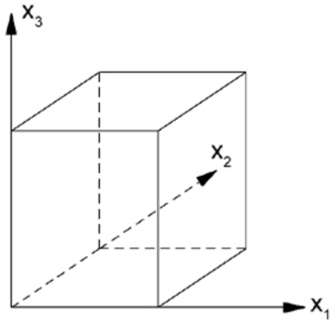
Zwei Körper, die in jeder Höhe flächengleiche Querschnitte besitzen, haben gleiches Volumen.

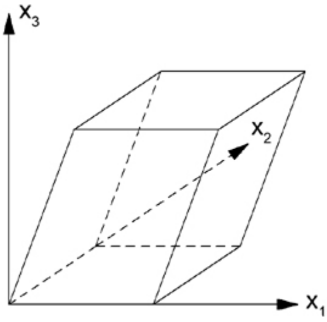
Cavalieri (italienischer Mathematiker 1598 – 1647, Schüler Galileis)

Portrait mit freundlicher Genehmigung von: http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html

2.3.2 Anwendung auf das schiefe Prisma

Ein Prisma ist ein Körper mit einem Vieleck als Grundfläche.





Volumen des geraden Quaders: $\boldsymbol{Grundfläche \cdot Höhe}$

Schert man den Quader parallel zur Grundfläche (Spat) , dann bleiben Grundfläche A und Höhe h gleich – und nach Cavalieri – auch das Volumen.

Grundfläche: $A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Volumen des Spats (Parallelepipeds):

$$V = A \cdot h \quad \wedge \quad h = \left|\vec{c}\right| \cdot \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad V = A \cdot \left|\vec{c}\right| \cdot \cos\varphi = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cdot \cos\varphi$$

„Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ *und* $\vec{c}$

Der Name des Körpers kommt von der Form eines Minerals, dem ***Kalkspat***.

Ergebnis: Für das **Volumen eines Spats** gilt: $\boxed{V_{Spat} = \left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \circ \vec{c} \right|}$

2.3.3 Das Spatprodukt

Definition

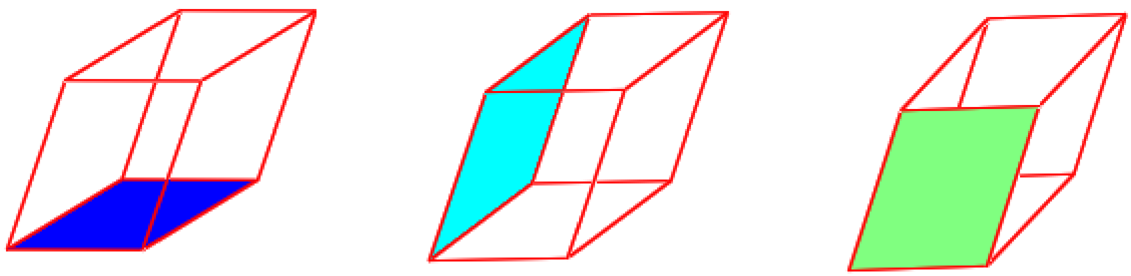
Für die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in IR^3$ ist das **Spatprodukt (**gemischtesPro-dukt aus Vektor- und Skalarprodukt) $\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}}$ eine reelle Zahl mit folgenden

Eigenschaften:

$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) < 90° \quad \Leftrightarrow$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Vertauschbarkeit der Vektoren:



$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \quad = \quad (\vec{b} \times \vec{c}) \circ \vec{a} \quad = \quad (\vec{c} \times \vec{a}) \circ \vec{b}$

In Koordinaten:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot a_3 \cdot b_2 - c_2 \cdot a_1 \cdot b_3 + c_2 \cdot a_3 \cdot b_1 + c_3 \cdot a_1 \cdot b_2 - c_3 \cdot a_2 \cdot b_1$$

Das ist die Entwicklung nach der 3. Spalte einer Determinante.

Definition

Eine ***Determinante*** ist eine spezielle Funktion, die einer ***quadratischen Matrix*** ein Skalar (skalare Maßzahl) zuordnet.

Zum Beispiel kann die Determinante D einer $(3\,x\,3)$-Matrix $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ über das Spatprodukt dreier Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$ und $\vec{c}$ berechnet werden.

$$(1) \qquad \boxed{D = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}}$$

Weitere Berechnungsmöglichkeiten für Determinanten:

(2) Regel nach Sarrus (gilt nur für dreireihige Determinanten)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} =$$

“Hauptdiagonale – Nebendiagonale“

$$D = a_1\, b_2\, c_3 + b_1\, c_2\, a_3 + c_1\, a_2\, b_3 - a_3\, b_2\, c_1 - b_3\, c_2\, a_1 - c_3\, a_2\, b_1$$

Da später beliebige $(n \times n)$-Determinanten vorkommen können, ein allgemeines Berechnungsschema:

(3) Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte: (Hier nach der 1. Spalte)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1$$

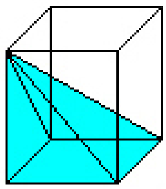
Spezialfall: Höhe $h = 0 \quad \Rightarrow$ ***Das Spat entartet zu einem ebenen Viereck.***

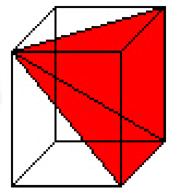
Satz

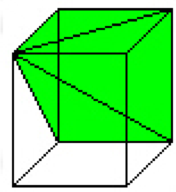
Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen in einer Ebene $\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **komplanar** $\Leftrightarrow$ $\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$

2.3.4 Volumenberechnungen

Ein Würfel (vierseitiges Prisma) kann in drei Pyramiden gleicher Grundfläche und Höhe zerlegt werden:

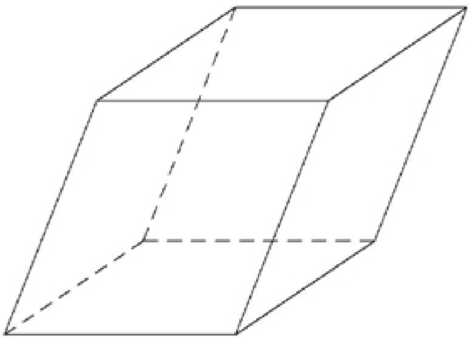






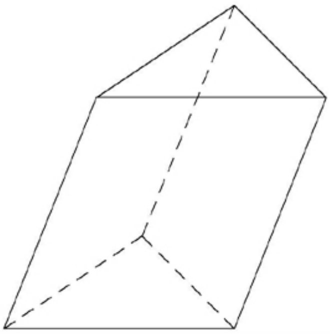
Das dreiseitige Prisma entsteht aus der Halbierung des vierseitigen Prismas.
Mit Anwendung des Cavalierischen Prinzips folgen die Volumenberechungen:

Spat



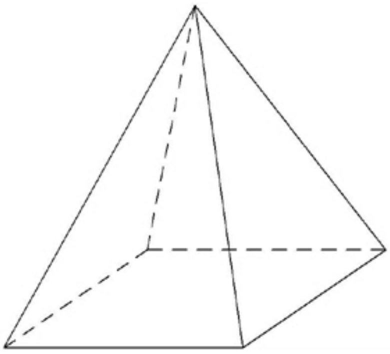
$$\boxed{V_{Spat} = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|}$$

Dreiseitiges Prisma



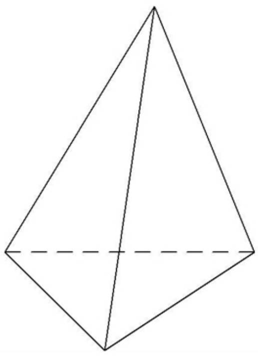
$$\boxed{V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|}$$

Vierseitige Pyramide



$$\boxed{V_{Pyramide\_4} = \frac{1}{3} \cdot \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|}$$

Dreiseitige Pyramide



$$\boxed{V_{Pyramide\_3} = \frac{1}{6} \cdot \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|}$$