Lineare Algebra - Aufgaben 1 - Lösung

- Geschlossene Vektorketten
- Skalarprodukt
- Vektorprodukt
- Spatprodukt

ORIGIN := **1**

Bemerkung

In der Fachliteratur ist die Bezeichnung $\vec{v}$ für einen Vektor üblich.
Diese Notation kann in Mathcad nicht verwendet werden, deshalb ist die
Darstellung $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ anstatt $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ nur aus dem Kontext erkennbar.

Geschlossene Vektorketten

Aufgabe 1: Parallelogramm im IR³ und Projektionen

Die Punkte $A := (0 \quad 4 \quad 5)$, $B := (3 \quad 0 \quad 5)$ und $C := (3 \quad 4 \quad 0)$ bilden die Ecken eines Parallelogramms.
a) Bestimmen Sie die 4. Ecke (3 Lösungen).
b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte der Projektion in die x_1x_2-Ebene, in die x_1x_3-Ebene und in die x_2x_3-Ebene und zeichnen Sie das Netz mithilfe von Mathcad.

Teilaufgabe a)

Ortsvektoren:

$$OA := A^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad OB := B^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad OC := C^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren:

$$AB := OB - OA = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad AC := OC - OA = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad BC := OC - OB = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der vierten Ecke:

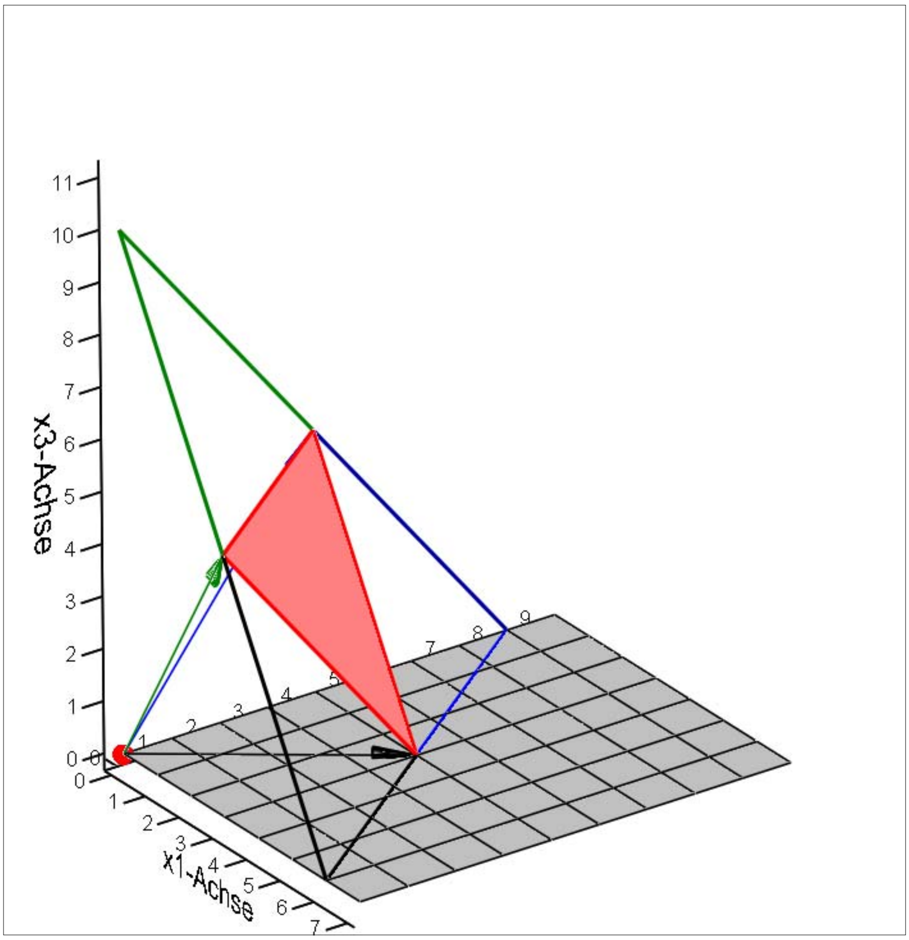
$$OD_1 := OB + AC = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D_1 := {OD_1}^T \qquad D_1 \rightarrow (6 \quad 0 \quad 0)$$

$$OD_2 := OA + BC = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D_2 := OD_2^T \qquad D_2 \rightarrow (0 \;\; 8 \;\; 0)$$

$$OD_3 := OA - BC = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad D_3 := OD_3^T \qquad D_3 \rightarrow (0 \;\; 0 \;\; 10)$$

Parallelogramme

MODUL Vektor R3



OA: blau
OB: grün
OC: schwarz

Eckpunkte:

$A \rightarrow (0 \;\; 4 \;\; 5)$

$B \rightarrow (3 \;\; 0 \;\; 5)$

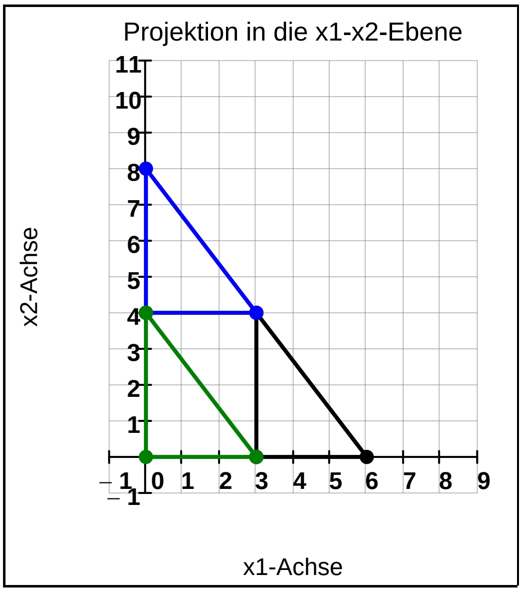
$C \rightarrow (3 \;\; 4 \;\; 0)$

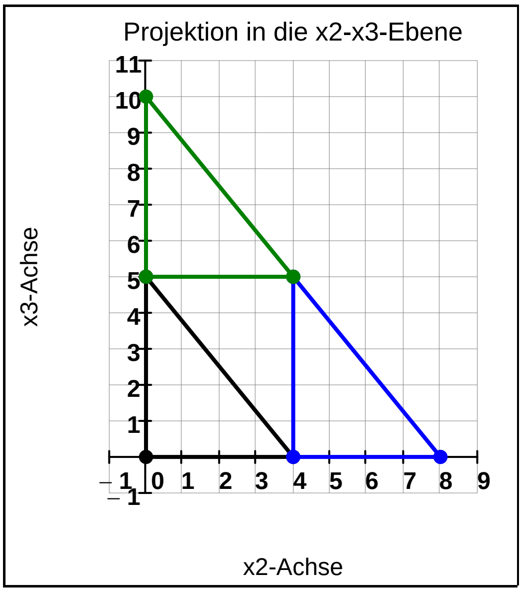
$D_1 \rightarrow (6 \;\; 0 \;\; 0)$

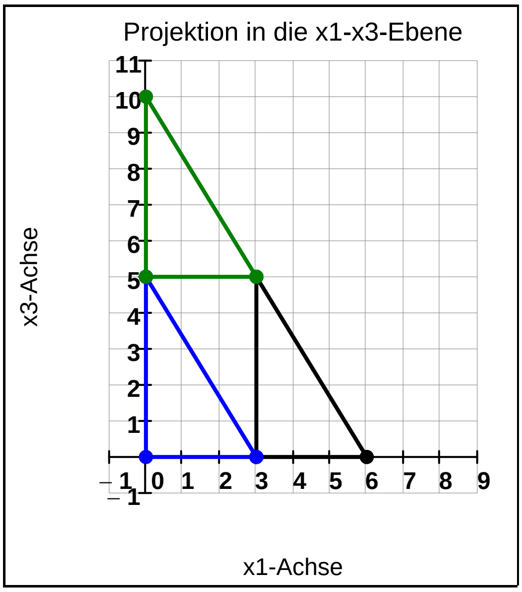
$D_2 \rightarrow (0 \;\; 8 \;\; 0)$

$D_3 \rightarrow (0 \;\; 0 \;\; 10)$

Teilaufgabe b)





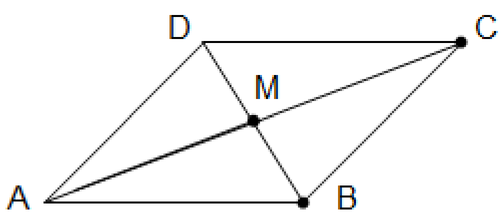


Aufgabe 2

Vom Parallelogramm ABCD kennt man die Koordinaten der Punkte $\mathbf{B} := (\mathbf{2}\ \ \mathbf{4}\ \ \mathbf{3})$, $\mathbf{C} := (\mathbf{3}\ \ \mathbf{0}\ \ -\mathbf{5})$ und den Schnittpunkt der Diagonalen $\mathbf{M} := (-\mathbf{2}\ \ \mathbf{4}\ \ \mathbf{15})$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A und D.

Ortsvektoren:

$$\mathbf{OB} := \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{OC} := \mathbf{C}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{5} \end{pmatrix}$$



$$OM := M^T = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren:

$$BM := OM - OB = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad CM := OM - OC = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$OD := OB + 2 \cdot BM = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 27 \end{pmatrix} \qquad OA := OC + 2 \cdot CM = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der gesuchten Eckpunkte:

$$D := OD^T \rightarrow (-6 \quad 4 \quad 27) \qquad A := OA^T \rightarrow (-7 \quad 8 \quad 35)$$

Anwendungen zum Skalarprodukt

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ einen Würfel aufspannen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $\vec{a} = \begin{bmatrix} k \\ k+1 \\ k \cdot (k+1) \end{bmatrix}$; $\vec{b} = \begin{bmatrix} k+1 \\ -k \cdot (k+1) \\ k \end{bmatrix}$; $\vec{c} = \begin{bmatrix} k \cdot (k+1) \\ k \\ -k-1 \end{bmatrix}$;

Teilaufgabe a)

Mathcad-Darstellung der Vektoren:

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kantenlängen:

$|a| = 3 \qquad |b| = 3 \qquad |c| = 3 \qquad \Leftrightarrow$ alle Kanten gleich lang.

Skalarprodukte:

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 0 \qquad \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0 \qquad \Leftrightarrow$ a senkrecht b, a senkrecht c, b senkrecht c

Teilaufgabe b)

Mathcad-Darstellung der Vektoren:

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}) := \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{k}+1 \\ \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}(\mathbf{k}) := \begin{bmatrix} \mathbf{k}+1 \\ -\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1) \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}(\mathbf{k}) := \begin{bmatrix} \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1) \\ \mathbf{k} \\ -\mathbf{k}-1 \end{bmatrix}$$

Kantenlängen:

$$|\mathbf{a}(\mathbf{k})| \rightarrow \sqrt{[|\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1)|]^2 + (|\mathbf{k}+1|)^2 + (|\mathbf{k}|)^2}$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{k})| \left| \begin{array}{l} \textbf{ersetzen}, |\mathbf{k}+1| = \mathbf{k}+1 \\ \textbf{ersetzen}, |\mathbf{k}| = \mathbf{k} \\ \textbf{ersetzen}, |\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1)| = \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1) \end{array} \right. \rightarrow \sqrt{\left(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}+1\right)^2}$$

$$|\mathbf{b}(\mathbf{k})| \rightarrow \sqrt{[|\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1)|]^2 + (|\mathbf{k}+1|)^2 + (|\mathbf{k}|)^2}$$

$$|\mathbf{b}(\mathbf{k})| \left| \begin{array}{l} \textbf{ersetzen}, |\mathbf{k}+1| = \mathbf{k}+1 \\ \textbf{ersetzen}, |\mathbf{k}| = \mathbf{k} \\ \textbf{ersetzen}, |\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1)| = \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1) \end{array} \right. \rightarrow \sqrt{\left(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}+1\right)^2}$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{k})| \rightarrow \sqrt{[|\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1)|]^2 + (|-\mathbf{k}-1|)^2 + (|\mathbf{k}|)^2}$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{k})| \left| \begin{array}{l} \textbf{ersetzen}, |-\mathbf{k}-1| = \mathbf{k}+1 \\ \textbf{ersetzen}, |\mathbf{k}| = \mathbf{k} \\ \textbf{ersetzen}, |\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1)| = \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1) \end{array} \right. \rightarrow \sqrt{\left(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}+1\right)^2}$$

Skalarprodukte:

$\mathbf{a}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{b}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\cdot\left(\overline{\mathbf{k}}+1\right) + \mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{k}+1) - \overline{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{k}+1)\cdot\left(\overline{\mathbf{k}}+1\right)$ **ersetzen**, $\overline{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \quad = 0 \quad \Leftrightarrow$ a senkrecht b

$\mathbf{a}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{c}(\mathbf{k}) = \overline{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{k}+1) + \mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{k}}\cdot\left(\overline{\mathbf{k}}+1\right) - \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+1)\cdot\left(\overline{\mathbf{k}}+1\right)$ **ersetzen**, $\overline{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \quad = 0 \quad \Leftrightarrow$ a senkrecht c

$\mathbf{b}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{c}(\mathbf{k}) = \overline{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{k}+1)\cdot\left(\overline{\mathbf{k}}+1\right) - \mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{k}+1) - \mathbf{k}\cdot\left(\overline{\mathbf{k}}+1\right)$ **ersetzen**, $\overline{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \quad = 0 \quad \Leftrightarrow$ b senkrecht c

Aufgabe 4

Für welche Werte von u ist $\vec{a}$ senkrecht $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ senkrecht $\vec{c}$ und $\vec{b}$ senkrecht $\vec{c}$?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2\cdot u \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -u \\ 14 \\ -u \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2\cdot u \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2-3\cdot u \\ u \\ 2+2\cdot u \end{pmatrix}$;

Teilaufgabe a)

Mathcad-Darstellung der Vektoren:

$a(u) := \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2\cdot u \end{pmatrix}$ $\qquad b(u) := \begin{pmatrix} -u \\ 14 \\ -u \end{pmatrix}$ $\qquad c(u) := \begin{pmatrix} 2\cdot u \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a(u)\cdot b(u) = 0 \rightarrow 14\cdot u - \overline{u} - 2\cdot u\cdot \overline{u} = 0 \text{ ersetzen}, \overline{u} = u \ \rightarrow -u\cdot(2\cdot u - 13) = 0$

$u_1 = 0$ $\qquad u_2 = \frac{13}{2}$

$a(u)\cdot c(u) = 0 \rightarrow 2\cdot \overline{u} - 2\cdot u = 0 \text{ ersetzen}, \overline{u} = u \ \rightarrow 0 = 0$

u ist beliebig

$b(u)\cdot c(u) = 0 \rightarrow -u - 2\cdot u\cdot \overline{u} - 56 = 0 \text{ ersetzen}, \overline{u} = u \ \rightarrow -2\cdot u^2 - u - 56 = 0$

$-2\cdot u^2 - 56 - u = 0 \text{ auflösen}, u \ \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{447}\cdot i}{4} \\ -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{447}\cdot i}{4} \end{pmatrix}$

keine Lösung

keine Lösung

Teilaufgabe b)

Mathcad-Darstellung der Vektoren:

$a(u) := \begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad b(u) := \begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix}$ $\qquad c(u) := \begin{pmatrix} 2-3\cdot u \\ u \\ 2+2\cdot u \end{pmatrix}$

$a(u)\cdot b(u) = 0 \rightarrow \overline{u}\cdot(u+1) - (u-2)\cdot(\overline{u}+2) - \overline{u} - 4 = 0 \text{ ersetzen}, \overline{u} = u \ \rightarrow 0 = 0$

also: u ist beliebig

$$\mathbf{a(u)\cdot c(u) = 0 \rightarrow -2\cdot\overline{u} - \left(3\cdot\overline{u} - 2\right)\cdot(u + 1) - \overline{u}\cdot(u - 2) - 2 = 0 \ \text{ersetzen}, \overline{u} = u \ \rightarrow -u\cdot(4\cdot u + 1) = 0}$$

$$\mathbf{-u\cdot(4\cdot u + 1) = 0 \ \text{auflösen}, u \ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{b(u)\cdot c(u) = 0 \rightarrow \left(2\cdot\overline{u} + 2\right)\cdot(u + 4) - u\cdot\left(3\cdot\overline{u} - 2\right) + \overline{u}\cdot(u + 2) = 0 \ \text{ersetzen}, \overline{u} = u \ \rightarrow 14\cdot u + 8 = 0}$$

$$\mathbf{14\cdot u + 8 = 0 \ \text{auflösen}, u \ \rightarrow -\frac{4}{7}}$$

Aufgabe 5

Für welche Werte von u bildet das Vektorpaar einen Winkel von a) $\mathbf{45\cdot Grad}$ und b) $\mathbf{60\cdot Grad}$?

a) $\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$; $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2\cdot u \end{pmatrix}$;

b) $\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$; $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -1 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$;

Teilaufgabe a)

Mathcad-Darstellung der Vektoren:

$$\mathbf{a(u) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}} \qquad \mathbf{b(u) := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2\cdot u \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{a(u)\cdot b(u) \rightarrow 2\cdot u\cdot\overline{u} - 5 \ \text{ersetzen}, \overline{u} = u \ \rightarrow 2\cdot u^2 - 5}$$

$$\mathbf{|a(u)| \rightarrow \sqrt{(|u|)^2 + 2} \ \text{ersetzen}, |u| = u \ \rightarrow \sqrt{u^2 + 2}}$$

$$\mathbf{|b(u)| \rightarrow \sqrt{4\cdot(|u|)^2 + 17} \ \text{ersetzen}, |u| = u \ \rightarrow \sqrt{4\cdot u^2 + 17}}$$

$$\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a(u)\cdot b(u)}{|a(u)|\cdot|b(u)|} \ \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, \overline{u} = u \\ \text{ersetzen}, |u| = u \end{array} \right. \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\cdot u^2 - 5}{\sqrt{4\cdot u^2 + 17}\cdot\sqrt{u^2 + 2}}}$$

$$\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a(u)\cdot b(u)}{|a(u)|\cdot|b(u)|} \ \text{auflösen}, u \ \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

Teilaufgabe b)

Mathcad-Darstellung der Vektoren:

$$a(u) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} \qquad b(u) := \begin{pmatrix} -1 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a(u) \cdot b(u) \rightarrow u + \overline{u} - 1 \text{ ersetzen}, \overline{u} = u \rightarrow 2 \cdot u - 1$$

$$|a(u)| \rightarrow \sqrt{(|u|)^2 + 2} \text{ ersetzen}, |u| = u \rightarrow \sqrt{u^2 + 2}$$

$$|b(u)| \rightarrow \sqrt{(|u|)^2 + 2} \text{ ersetzen}, |u| = u \rightarrow \sqrt{u^2 + 2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a(u) \cdot b(u)}{|a(u)| \cdot |b(u)|} \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, \overline{u} = u \\ \text{ersetzen}, |u| = u \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot u - 1}{u^2 + 2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a(u) \cdot b(u)}{|a(u)| \cdot |b(u)|} \text{ auflösen}, u \rightarrow 2$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks ABC:

a) **A(6 / 3 / –4)** , **B(8 / 6 / 2)** und **C(2 / 9 / 8)**.

b) **A(9 / 9 / 0)** , **B(–6 / 3 / 9)** und C(**0**/ –**6**/ –**6**).

Teilaufgabe a)

Ortsvektoren: $OA := \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad OB := \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad OC := \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektoren:

$$AB := OB - OA = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad AC := OC - OA = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$CA := OA - OC = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad CB := OB - OC = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{AB \cdot AC}{|AB| \cdot |AC|}\right) \qquad \gamma := \operatorname{acos}\left(\frac{CA \cdot CB}{|CA| \cdot |CB|}\right) \qquad \beta := 180 \cdot \text{Grad} - (\alpha + \gamma)$$

$$\alpha = 33.2 \cdot \text{Grad} \qquad \gamma = 25.2 \cdot \text{Grad} \qquad \beta = 121.6 \cdot \text{Grad}$$

Teilaufgabe b)

Ortsvektoren: $OA := \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ $OB := \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ $OC := \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektoren:

$AB := OB - OA = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ $AC := OC - OA = \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix}$

$CA := OA - OC = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$ $CB := OB - OC = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{AB \cdot AC}{|AB| \cdot |AC|}\right)$ $\gamma := \operatorname{acos}\left(\frac{CA \cdot CB}{|CA| \cdot |CB|}\right)$ $\beta := 180 \cdot \text{Grad} - (\alpha + \gamma)$

$\alpha = 60 \cdot \text{Grad}$ $\gamma = 60 \cdot \text{Grad}$ $\beta = 60 \cdot \text{Grad}$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Projektion a) von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$ und b) $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Gegebene Vektoren: $a := \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $b := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Projektion b auf a:

$a_b := \frac{a \cdot b}{(|a|)^2} \cdot a$ $a_b \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Projektion a auf b:

$b_a := \frac{a \cdot b}{(|b|)^2} \cdot b$ $b_a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anwendungen zum Vektorprodukt

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche des Parallelogramms ABDC:
$\mathbf{A} := (1 \;\; 0 \;\; -1)$, $\mathbf{B} := (1 \;\; -3 \;\; 3)$ und $\mathbf{C} := (5 \;\; 3 \;\; 2)$.

Ortsvektoren:

$$\mathbf{OA} := \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{OB} := \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{OC} := \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren:

$$\mathbf{AB} := \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AC} := \mathbf{OC} - \mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Flächenmaßzahl:

$$\mathbf{A_{Par}} := |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| \qquad \mathbf{A_{Par}} = 29$$

Aufgabe 9

Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche des Dreiecks ABC:

a) $\mathbf{A_1} := (-2 \;\; 2 \;\; -3)$, $\mathbf{B_1} := (0 \;\; 0 \;\; 0)$ und $\mathbf{C_1} := (3 \;\; -2 \;\; 0)$.

b) $\mathbf{A_2} := (3 \;\; 2 \;\; 1)$, $\mathbf{B_2} := (5 \;\; -2 \;\; 1)$ und $\mathbf{C_2} := (7 \;\; -2 \;\; -5)$.

Teilaufgabe a)

Ortsvektoren:

$$\mathbf{OA} := \mathbf{A_1}^T = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{OC} := \mathbf{C_1}^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit Punkt B als Scheitel gilt:

Flächenmaßzahl:

$$\mathbf{A_{Dreieck}} := \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{OA} \times \mathbf{OC}| \qquad \mathbf{A_{Dreieck}} = 5.5$$

Teilaufgabe b)

Ortsvektoren:

$$OA := {A_2}^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad OB := {B_2}^T = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad OC := {C_2}^T = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren:

$$AB := OB - OA = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad AC := OC - OA = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Flächenmaßzahl: $A_{Dreieck} := \frac{1}{2} \cdot |AB \times AC|$ $\quad A_{Dreieck} = 14$

Anwendungen zum Spatprodukt

Aufgabe 10

Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens V des von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Spats (Parallel-Epipeds).

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Teilaufgabe a)

Vektoren: $u := \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad u \times v = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix}$

Spatprodukt: $V_{Spat} := |(u \times v) \cdot w|$ $\qquad V_{Spat} = 72$

Teilaufgabe b)

Vektoren: $\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{w} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

Spatprodukt: $V_{Spat} := |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ $V_{Spat} = 8$

Aufgabe 11

Berechnen Sie Maßzahl des Volumens des Tetraeders ABCD:

a) $A_1 := (1 \;\; 1 \;\; 1)$, $B_1 := (1 \;\; 4 \;\; 4)$, $C_1 := (4 \;\; 1 \;\; 4)$ und $D_1 := (4 \;\; 4 \;\; 1)$.

b) $A_2 := (0 \;\; 0 \;\; 0)$, $B_2 := (1 \;\; 1 \;\; -1)$, $C_2 := (1 \;\; -1 \;\; 0)$ und $D_2 := (-1 \;\; 1 \;\; 1)$.

Teilaufgabe a)

Vektoren:

$\mathbf{OA} := A_1^{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{OB} := B_1^{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{OC} := C_1^{T} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{OD} := D_1^{T} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektoren:

$\mathbf{AB} := \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{AC} := \mathbf{OC} - \mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{AD} := \mathbf{OD} - \mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$ $(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \cdot \mathbf{AD} = 54$

Spatprodukt:

$V_{Tetraeder} := \frac{1}{6} \cdot |(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \cdot \mathbf{AD}|$ $V_{Tetraeder} = 9$

Ortsvektoren:

$\mathbf{OB} := B_2^{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{OC} := C_2^{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{OD} := D_2^{T} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$OB \times OC = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (OB \times OC)\cdot OD = -2$$

$$V_{Tetraeder} := \frac{1}{6}\cdot\left|(OB \times OC)\cdot OD\right| \qquad V_{Tetraeder} = \frac{1}{3} = 0.333$$

Aufgabe 12

Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein ebenes Viereck ist.
$A := (0\ \ 0\ \ 0)$, $B := (6\ \ 9\ \ -6)$, $C := (6\ \ 3\ \ 6)$ und $D := (-4\ \ -8\ \ 8)$.

Ortsvektoren:

$$OB := B^T = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad OC := C^T = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad OD := D^T = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Spatprodukt:

$$OB \times OC = \begin{pmatrix} 72 \\ -72 \\ -36 \end{pmatrix} \qquad (OB \times OC)\cdot OD = 0 \qquad \Rightarrow$$

Ebenes Viereck