Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 1988

- **Mathematik 12 Technik - A I - Lösung**

Aufgabe

Gegeben sind die reellen Funktion $f_a(x) = \frac{-x^2 + (a-1)\cdot x}{x+1}$ mit $a \in IR \wedge a \geq 0$ in der maximalen, von a unabhängigen Definitionsmenge $D = IR \setminus \{-1\}$. Der Graph einer solchen Funktion f_a in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_a.

Teilaufgabe 1 (4 BE)

Für welchen Wert von a hat die Funktion f_a eine stetig behebbare Definitionslücke?

Zeichnen Sie für diesen Fall den zugehörigen Graphen G_a.

Maßstab: 1 LE entspricht 1 cm.

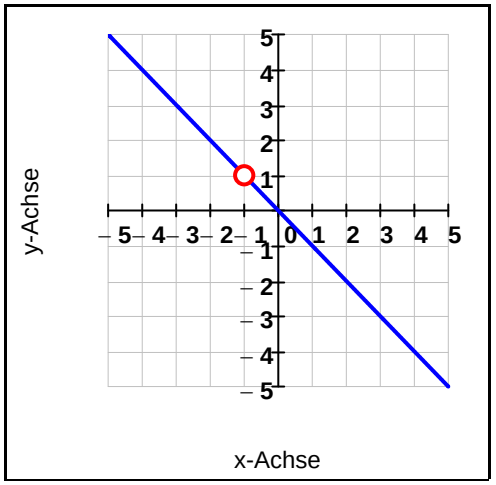
Allgemeiner Funktionsterm: $f(x,a) := \frac{-x^2 + (a-1)\cdot x}{x+1}$

Nennernullstelle: $x_0 := -1$

Nullstelle des Nenners = Nullstelle des Zählers

$z(x,a) := -x^2 + (a-1)\cdot x$ $\quad z(x_0,a) = 0 \rightarrow -a = 0$ **auflösen**, $a \rightarrow 0$ $\quad a_0 = 0$

Gekürzter Funktionsterm: $f(x,0) = -x$



Teilaufgabe 2.0
Für diese Teilaufgaben wird $a > 0$ vorausgesetzt.
Teilaufgabe 2.1 (3 BE)
Bestimmen Sie die Lage und die Anzahl der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 2.2.1 (3 BE)
Zeigen Sie mittels Polynomdivision, dass sich der Funktionsterm $f_a(x)$ auch wie folgt darstellen lässt: $f_a(x) = -x + a - \frac{a}{x+1}$

Polynomdivision mit Rest:

$$\begin{array}{l} \left[-x^2 + (a-1)\cdot x\right] : (x+1) = -x + a \\ -\left(-x^2 - x\right) \\ \hline \\ \quad a\cdot x + 1 \\ \quad -(a\cdot x + a) \\ \hline \\ \quad 1 - a \quad \text{Rest} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad f(x,a) = -x + a + \frac{1-a}{x+1}$$

Mathcad-Lösung: $f(x,a) = \frac{x\cdot(a-1) - x^2}{x+1} = a - x - \frac{a}{x+1}$

Teilaufgabe 2.2.2 (2 BE)
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_a an.

Senkrechte Asymptote: $x = -1$

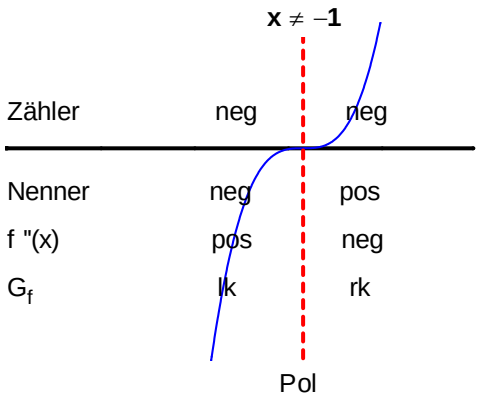
Schiefe Asymptote: $g(x,a) := -x + a$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion f_a.

$$f'(x,a) := \frac{d}{dx} f(x,a) = \frac{a - 2\cdot x - x^2 - 1}{(x+1)^2}$$

$$f''_a(x,a) := \frac{d}{dx} f'(x,a) = -\frac{2\cdot a}{(x+1)^3}$$

Teilaufgabe 2.4 (5 BE)
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_a. Gibt es Wendepunkte? Begründen Sie Ihre Anwort.



G_f ist linksgekrümmt in $x \in]-\infty\,;\,-1[$,
G_f ist rechtsgekrümmt in $x \in]-1\,;\,\infty[$.

Es gibt keinen Wendepunkt, da sich das Krümmungsverhalten an der Polstelle ändert.

Teilaufgabe 2.5.1 (7 BE)
Untersuchen Sie den Graphen G_a mit $a > 0$ auf Hoch- und Tiefpunkte, und berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte in Abhängigkeit von a.
(Teilergebnis: Hochpunkt $(-1+\sqrt{a}\,/\,1-2\cdot\sqrt{a}+a)$)

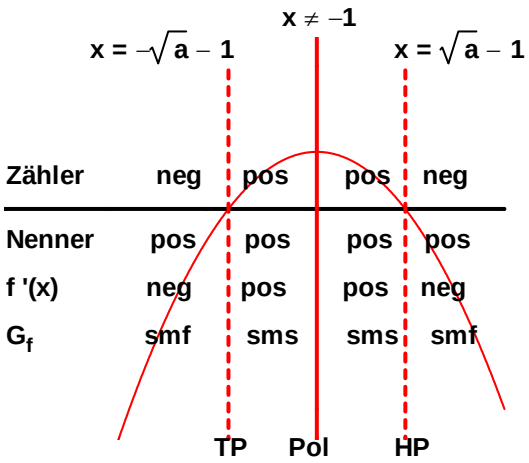
$$f'(x,a) = -\frac{x^2+2\cdot x-a+1}{(x+1)^2}$$

Zähler: $z'(x,a) := \text{numer}(f'(x,a)) = a-2\cdot x-x^2-1$

Waagrechte Tangenten:

$$xE(a) := z'(x,a) = 0 \rightarrow a-2\cdot x-x^2-1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix}\sqrt{a}-1\\ -\sqrt{a}-1\end{pmatrix}$$

$x_{E1}(a) = -\sqrt{a}-1$ $\qquad$ $x_{E2}(a) = \sqrt{a}-1$



Tiefpunkt:

$$f\left(x_{E1}(a),a\right) = \left(\sqrt{a}+1\right)^2$$

$$TP(-1-\sqrt{a}\,/\,\left(\sqrt{a}+1\right)^2)$$

Hochpunkt:

$$f\left(x_{E2}(a),a\right) = \left(\sqrt{a}-1\right)^2$$

$$HP(-1+\sqrt{a}\,/\,\left(\sqrt{a}-1\right)^2)$$

Teilaufgabe 2.5.2 (7 BE)
Die Hochpunkte aller Graphen G_a ($a > 0$) liegen auf dem Graphen G_p der Funktion p(x).

Bestimmen Sie den Funktonsterm p(x).
Wie ist die Definitionsmenge der Funktion p zu wählen, damit jeder Punkt ihres Graphen G_p Hochpunkt eines Graphen G_a ist?

Parameterdarstellung:

$$O(x) := \begin{bmatrix} x = -1 + \sqrt{a} \\ y = \left(\sqrt{a} - 1\right)^2 \end{bmatrix} \text{ auflösen}, a, y \rightarrow \left[(x+1)^2 \quad \left[\sqrt{(x+1)^2} - 1\right]^2\right]$$

Ortskurve:

$$p(x) := O(x)_{1,2} \qquad p(x) = x^2$$

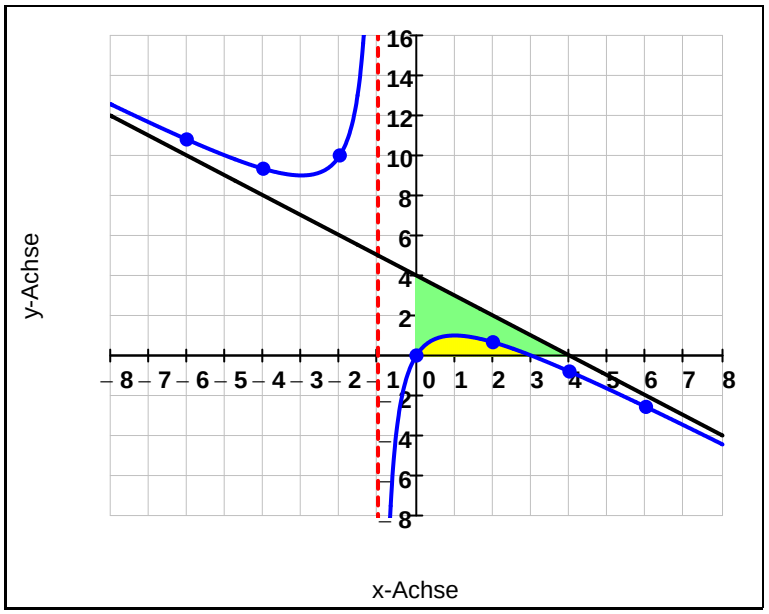
Definitionsmenge: $D_p = \{ x \in IR \mid x > -1 \}$

Teilaufgabe 3.0

Für $a = 4$ erhält man die Funktion f_4 mit $f_4(x) = -x + 4 - \frac{4}{x+1}$.

Teilaufgabe 3.1 (8 BE)
Zeichnen Sie den Graphen G_4 für $|x| \le 7$ und $x \in D$.

Fertigen Sie dazu eine Wertetabelle an mit der Schrittweite $\Delta x = 1$, und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte an den Stellen $x = -1.5$ und $x = -0.5$.
Tragen Sie die Asymptoten des Graphen G_4 in die Zeichnung ein.



x_d =
-6
-4
-2
0
2
4
6

$f(x_d, 4)$ =
10.8
9.3
10
0
0.7
-0.8
-2.6

Teilaufgabe 3.2 (7 BE)
Der Graph G_4, seine schiefe Asymptote und die beiden Koordinatenachsen schließen im 1. Quadranten ein Flächenstück ein.
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück im Schaubild von Teilaufgabe 3.1, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

Nullstelle der schiefen Asymptote: $x_0 := g(x,4) = 0 \rightarrow 4 - x = 0$ **auflösen**$, x \rightarrow 4$

$x_0 = 4$

$g(x,4) = 4 - x$ $\quad f(x,4) = 4 - \frac{4}{x+1} - x$

Differenzfunktion: $d(x) := g(x,4) - f(x,4)$ **vereinfachen** $= \frac{4}{x+1}$

Stammfunktion: $F(x) := \int 4 - \frac{4}{x+1} - x\,dx = 4 \cdot x - 4 \cdot \ln(|x+1|) - \frac{x^2}{2}$

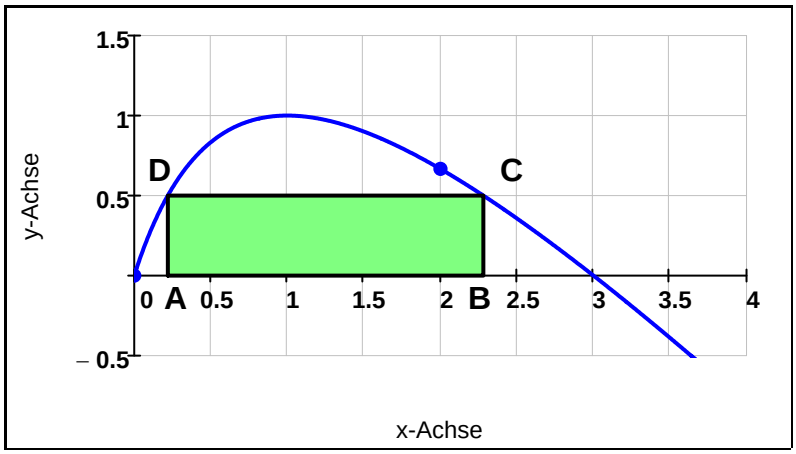
Dreiecksfläche: $A_1 := \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$ $\quad A_1 = 8$

Fläche unter G_f: $A_2 := F(3) - F(0)$ $\quad A_2 = \frac{15}{2} - 4 \cdot \ln(4) = 1.95$

Gesamtfläche: $A_{ges} := A_1 - A_2$ $\quad A_{ges} = 4 \cdot \ln(4) + \frac{1}{2} = 6.05$

Teilaufgabe 3.3.0
Die Gerade mit der Gleichung $y = u$ mit $0 < u < 1$ und $u \in IR$ schneidet den Graphen G_4 in den Punkten C und D ($x_D < x_C$). Durch senkrechte Projektion der Punkte D und C auf die x-Achse erhält man die Punkte A und B.

Teilaufgabe 3.3.1 (2 BE)
Kennzeichnen Sie das Rechteck ABCD für den Sonderfall $u = 0.5$ in Ihrer Zeichnung.



Teilaufgabe 3.3.2 (7 BE)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt J(u) des Rechtecks ABCD gilt: $J(u) = u \cdot \sqrt{u^2 - 10 \cdot u + 9}$.

Bestimmung von A und B:

$$f(x,4) = u \rightarrow \frac{3 \cdot x - x^2}{x+1} = u \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{erweitern} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{u^2 - 10 \cdot u + 9}}{2} - \frac{u}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{u^2 - 10 \cdot u + 9}}{2} - \frac{u}{2} \end{pmatrix}$$

x-Koordinate von A: $x_A(u) := \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{u^2 - 10 \cdot u + 9}}{2} - \frac{u}{2}$

x-Koordinate von B: $x_B(u) := \frac{\sqrt{u^2 - 10 \cdot u + 9}}{2} - \frac{u}{2} + \frac{3}{2}$

Rechtecksfläche: $J(u) := \left(x_B(u) - x_A(u)\right) \cdot u = u \cdot \sqrt{u^2 - 10 \cdot u + 9}$

Teilaufgabe 3.3.3 (8 BE)

Berechnen Sie den Wert von u, für den der Flächeninhalt J(u) seinen absolut größten Wert annimmt. Weisen Sie das Vorliegen dieses Maximums ohne Zuhilfenahme der 2. Ableitung der Funktion J nach.

Ableitungsfunktion: $J'(u) := \frac{d}{du} J(u) \text{ Faktor} \rightarrow \frac{2 \cdot u^2 - 15 \cdot u + 9}{\sqrt{u^2 - 10 \cdot u + 9}}$

Waagrechte Tang.: $J'(u) = 0 \rightarrow \frac{2 \cdot u^2 - 15 \cdot u + 9}{\sqrt{u^2 - 10 \cdot u + 9}} = 0$

$$u0 := 2 \cdot u^2 - 15 \cdot u + 9 = 0 \text{ auflösen}, u \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot \sqrt{17}}{4} + \frac{15}{4} \\ \frac{15}{4} - \frac{3 \cdot \sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}$$

Extremalstellen: $u_1 := u0_1 \rightarrow \frac{3 \cdot \sqrt{17}}{4} + \frac{15}{4} = 6.842$ $\quad u_2 := u0_2 = \frac{15}{4} - \frac{3 \cdot \sqrt{17}}{4} = 0.658$

Funktionswerte: $J(u_1) = 24.293i$ keine Lösung: $J(u_2) = 1.111$

Vergleich mit den Randwerten: $J(0) = 0$ $\quad J(1) = 0$

Absolutes Maximum: $J_{max} = 1.11$ an der Stelle $u_{max} = 0.658$