Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 1997

- **Mathematik 12 Technik - A I - Lösung**

ORIGIN := 1

Aufgabe

Gegeben sind die reellen Funktion $f_a(x) = \dfrac{x^2 + a \cdot x + 3 \cdot a}{x - 1}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der von a unabhängigen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Der Graph einer solchen Funktion f_a in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_a bezeichnet.

Teilaufgabe 1.0
In diese Teilaufgabe kann a eine beliebige reelle Zahl sein.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Definitionslücke der zugehörigen Funktion f_a stetig behebbar ist. Geben Sie für diesen Wert von a den Funktionsterm in möglichst einfacher Form an.

$$f(x, a) := \frac{x^2 + a \cdot x + 3 \cdot a}{x - 1}$$

Stetig hebbare Definitionslücke: Nullstelle des Nenners in den Zähler einsetzen:

Nennernullstelle: $x_0 := x - 1 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow 1$

Zähler definieren: $z(x, a) := x^2 + a \cdot x + 3 \cdot a$ $\qquad a_1 := z(x_0, a) = 0 \text{ auflösen}, a \;\rightarrow -\frac{1}{4}$

Parameter a einsetzen:: $a_1 = -0.25$ $\qquad f(x, a_1) = -\dfrac{\frac{x}{4} - x^2 + \frac{3}{4}}{x - 1} = x + \dfrac{3}{4}$

Funktionsterm vereinfachen: $f(x, a_1) \text{ vereinfachen } \rightarrow x + \frac{3}{4}$

Definition des konkreten Funktionsterms: $f_1(x) := x + \frac{3}{4}$

Stetig behebbare Definitionslücke: $f_1(x_0) = \frac{7}{4} = 1.75$

$D_1 := \begin{pmatrix} x_0 & f_1(x_0) \end{pmatrix}$ $\qquad D_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)
Bestimmen Sie die Anzahl und die Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Nullstellenbedingung: Zähler gleich Null setzen

$$z(x,a) = 0 \rightarrow x^2 + a \cdot x + 3 \cdot a = 0$$

Auflösen:

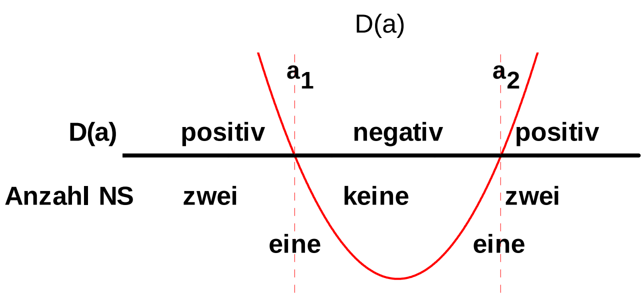
$$x_0(a) := z(x,a) = 0 \rightarrow x^2 + a \cdot x + 3 \cdot a = 0 \;\Bigg|\; \begin{matrix}\text{auflösen}, x \\ \text{erweitern}\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{a^2 - 12 \cdot a}}{2} - \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 12 \cdot a}}{2} \end{pmatrix}$$

Diskriminante definieren: $D(a) := a^2 - 12 \cdot a$

Nullstellen der Diskriminante: $a_{12} := D(a) = 0 \rightarrow a^2 - 12 \cdot a = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

Auslesen der Lösungen $a_1 := {a_{12}}_1$ $\quad a_1 = 0$ $\qquad a_2 := {a_{12}}_2$ $\quad a_2 = 12$

Graphische Lösung:



Algebraische Lösung:

zwei Nullstellen: $a^2 - 12 \cdot a > 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow a < 0 \vee 12 < a$ und $a \neq \frac{-1}{4}$

Abrufen der Nullstellen: $x_{N1}(a) := x_0(a)_2$ $\qquad x_{N2}(a) := x_0(a)_1$

$$x_{N1}(a) = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 12 \cdot a}}{2} \qquad x_{N2}(a) = \frac{\sqrt{a^2 - 12 \cdot a}}{2} - \frac{a}{2}$$

jeweils einfach

eine Nullstelle: $a_{23} := a^2 - 12 \cdot a = 0$ **auflösen**, $a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

Abrufen: $a_2 := a_{23_1}$ $\quad a_2 = 0 \quad$ $a_3 := a_{23_2}$ $\quad a_3 = 12$

Sei **a = 0**: $x_{N1}(0) = 0$ zweifache Nullstelle $f(x,0) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Sei **a = 12**: $x_{N1}(12) = -6$ zweifache Nullstelle $f(x,-6) = -\dfrac{6 \cdot x - x^2 + 18}{x-1}$

Spezialfall: $a_1 := -\dfrac{1}{4}$ $\quad x + \dfrac{3}{4} = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow -\dfrac{3}{4}$ Also: $x_{N3} := \dfrac{-3}{4}$

einfache Nullstelle

keine Nullst.: $a^2 - 12 \cdot a < 0$ **auflösen**, $a \rightarrow 0 < a < 12$

Teilaufgabe 1.3 **(7 BE)**
Zeigen Sie, dass alle Graphen G_a punktsymmetrisch zum Punkt $\mathbf{S_a(1\ /\ a+2)}$ sind.

Punktsymmetrie zum Punkt S(1/a+2) = Schnittpunkt von vertikaler und schiefer Aymptote:

Zur Erinnerung: $f(x,a) \rightarrow \dfrac{x^2 + a \cdot x + 3 \cdot a}{x-1}$

Koordinatentransformation: $x_T(u) := u + 1 \qquad y_T(v,a) := v + a + 2$

einsetzen: $f(x_T(u), a) = \dfrac{3 \cdot a + a \cdot (u+1) + (u+1)^2}{u}$

$v + a + 2 = \dfrac{3 \cdot a + a \cdot (u+1) + (u+1)^2}{u}$ **auflösen**, $v \rightarrow \dfrac{u^2 + 4 \cdot a + 1}{u}$

also Funktionsterm im neuen Koordinatensystem: $f\_(u,a) := \dfrac{u^2 + 4 \cdot a + 1}{u}$

Punktsymmetrie: $f\_(-u) = -f\_(u)$ äquivalent zu: $f\_(-u) + f\_(u) = 0$

Nachweis: $f\_(-u,a) + f\_(u,a) = 0$

Teilaufgabe 2.0
Setzen Sie für alle weiteren Teilaufgaben $\mathbf{a = 2}$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Zeigen Sie, dass alle Funktionsterme $f(x)$ dargestellt werden kann in der Form
$f(x) = x + 3 + \frac{9}{x-1}$ und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_f der Funktion f an.

$$f(x) := f(x, 2) = \frac{x^2 + 2\cdot x + 6}{x - 1}$$

Polynomdivision: $\frac{x^2 + 2\cdot x + 6}{x - 1}$ parfrac, x $\rightarrow x + \frac{9}{x-1} + 3$

konkrete Definition: $f(x) := x + 3 + \frac{9}{x-1}$

vertikale Asymptote mit VZW = Polstelle 1.Ordnung: $x = 1$

schiefe Asymptote: $g(x) := x + 3$

Teilaufgabe 2.2 (9 BE)
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f, und geben Sie die Koordinaten und die Art der Extremalpunkte des Graphen G_f an.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = 1 - \frac{9}{(x-1)^2}$]

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = 1 - \frac{9}{(x-1)^2}$$

Waagrechte Tangenten:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{9}{(x-1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 9 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zwei Extremstellen: $x_{E1} := -2$ $\qquad$ $x_{E2} := 4$

Zählerfunktion: $z'(x) := (x-1)^2 - 9$

Vorzeichentabelle für das Monotonieverhalten:

		$x = -2$		$x \neq 1$		$x = 4$	
Zähler	pos		neg		neg		pos
Nenner	pos		pos		pos		pos
f '(x)	pos		neg		neg		pos
G_f	sms		smf		smf		sms
		HP				TP	

$f(-2) = -2$

HP(−2 / −2)

$f(4) = 10$

TP(4 / 10)

Teilaufgabe 2.3 **(4 BE)**
Ermitteln Sie ohne weitere Rechnung mit Hilfe der Ergebnisse von Teilaufgabe 2.2 den Wertebereich der Funktion f_2 .

Graph besitzt eine schiefe Asymptote: $\lim_{x \to -\infty} f(x) \to -\infty$ $\lim_{x \to \infty} f(x) \to \infty$

Verhalten an der Definitionslücke: $\lim_{x \to 1^-} f(x) \to -\infty$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) \to \infty$

Funktion besitzt für x < 1 bzw für x > 1 nur ein Extremum, also gilt:

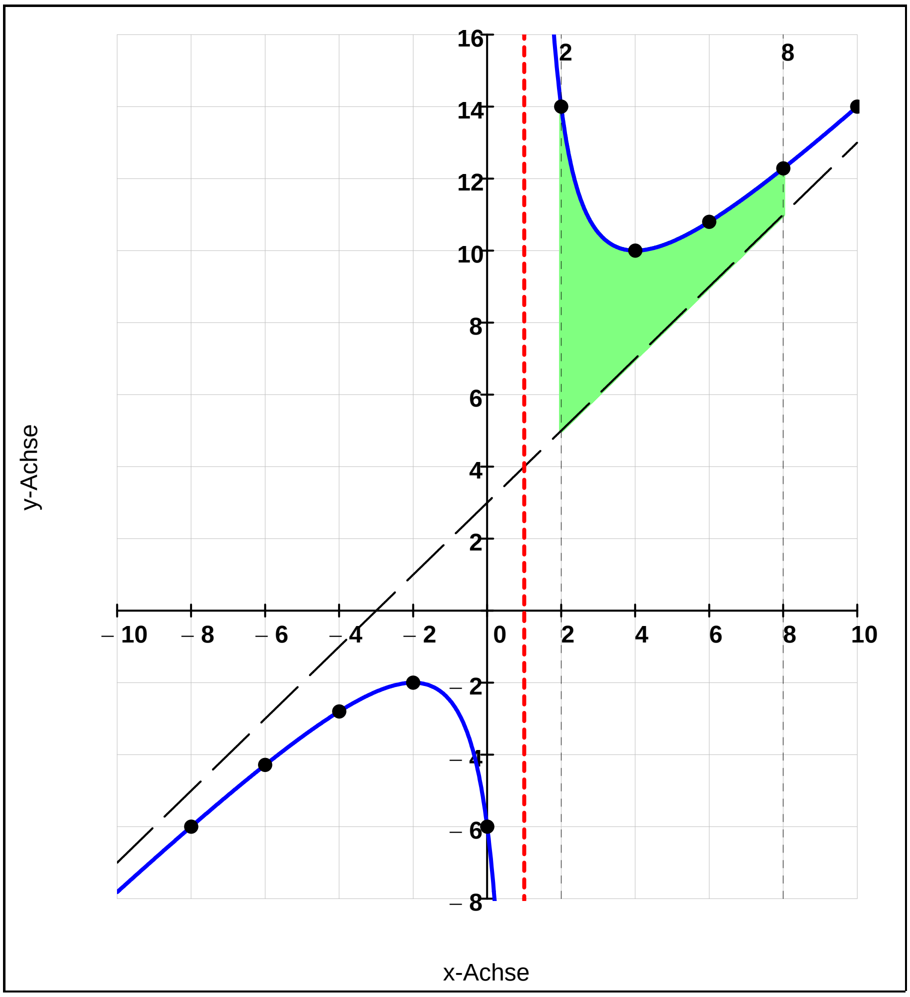
Wertemenge: $W =]\,-\infty\,;\,-2\,] \cup [\,4\,;\,\infty\,[$

Teilaufgabe 2.4 **(3 BE)**
Prüfen Sie, ob der Graph G_2 einen Wendepunkt besitzt.

$$f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{18}{(x-1)^3}$$

Zweite Ableitung besitzt keine Nullstelle, also auch keinen Wendepunkt.

Teilaufgabe 2.5 (6 BE)
Zeichnen Sie den Graphen G_2 im Bereich $-8 \leq x \leq 10$. Fertigen Sie dazu eine Wertetabelle mit der Schrittweite $\Delta x = 2$ an, und verwenden Sie ihre bisherigen Ergebnisse.
Tragen Sie auch die Asymptoten des Graphen G_2 in Ihre Zeichnung ein.



Teilaufgabe 2.6 (5 BE)
Die Gerade mit der Gleichung $x = k$ schneidet für $k \in \mathrm{IR}$ und $k \neq 1$ den Graph G_2 im Punkt P und die schiefe Asymptote des Graphen G_2 im Punkt Q.
Ermitteln Sie, für welche k die Längenmaßzahl der Strecke [PQ] kleiner als 0.01 ist.

Funktionsterm: $f(x) = x + 3 + \dfrac{9}{x-1}$ Schiefe Asymptote: $g(x) = x + 3$

$$|f(x) - g(x)| < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{9}{x-1}\right| < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{|x-1|} < 0.01$$

Auflösen des Betrags:

$x - 1 > 0$ auflösen, $x \rightarrow 1 < x$

$\frac{9}{x-1} < \frac{1}{100}$ auflösen, $x \rightarrow x < 1 \vee 901 < x$ also $x > 901$

$x - 1 < 0$ auflösen, $x \rightarrow x < 1$

$\frac{9}{-x+1} < \frac{1}{100}$ auflösen, $x \rightarrow 1 < x \vee x < -899$ also $x < -899$

Teilaufgabe 2.7 (5 BE)
Der Graph G_2, seine schiefe Asymptote und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = 2$ und $x = 8$ schließen im 1. Quadranten eine Fläche ein.
Kennzeichnen Sie diese Fläche im Schaubild der Teilaufgabe 2.5, und berechnen Sie ihre Flächenmaßzahl.

Stammfunktion:

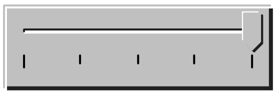
$$F(x) := \left| \int \left[x + 3 + \frac{9}{x-1} - (x+3) \right] dx \right| = 9 \cdot |\ln(x-1)|$$

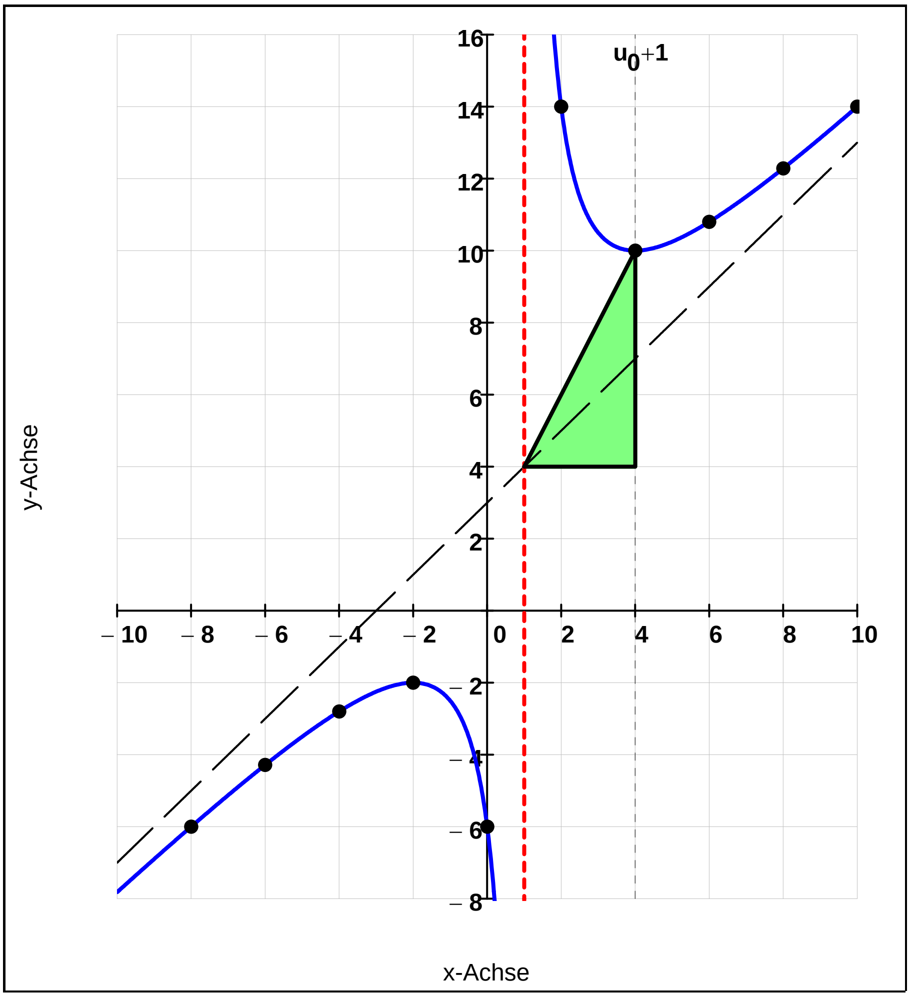
$$A := F(8) - F(2) = 9 \cdot \ln(7)$$

Teilaufgabe 3.0
Die Gerade mit der Gleichung $x = u + 1$, $u \in \mathrm{IR}$ und $u > 0$ schneidet den Graphen G_2 im Punkt A.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Weisen Sie nach, dass für die von u abhängige Maßzahl $s(u)$ des Abstandes der Punkte A und

$S_2\,(1/4)$ gilt: $\quad s(u) = \sqrt{2 \cdot u^2 + 18 + \dfrac{81}{u^2}}$





Abstand über Pythagoras: $\quad s(u) := \sqrt{[(u+1) - 1]^2 + (f(u+1) - 4)^2}$

$$s(u) = \sqrt{\left(u + \frac{9}{u}\right)^2 + u^2} = \sqrt{\frac{81}{u^2} + 2 \cdot u^2 + 18}$$

Teilaufgabe 3.2 **(4 BE)**
Berechnen Sie, für welchen Wert von **u**, $u \in \mathbb{R}$ und $u > 0$ die Maßzahl $s(u)$ ihren absolut kleinsten Wert annimmt.

$$s'(u) := \frac{d}{du}s(u) = \frac{2\cdot u - 2\cdot\left(\frac{9}{u^2} - 1\right)\cdot\left(u + \frac{9}{u}\right)}{2\cdot\sqrt{\left(u + \frac{9}{u}\right)^2 + u^2}} = \frac{2\cdot u^4 - 81}{u^3\cdot\sqrt{\frac{81}{u^2} + 2\cdot u^2 + 18}}$$

Horizontale Tangenten: $s'(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot u^4 - 81 = 0$

$$2\cdot u^4 - 81 = 0 \ \left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, u\\ \text{annehmen}, u = \text{reell}\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3\cdot 8^{\frac{1}{4}}}{2} \\ -\frac{3\cdot 8^{\frac{1}{4}}}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l}\text{Lösung}\\ \text{keine Lösung}\end{array}$$

Funktionswert: $s\left(\frac{3\cdot 8^{\frac{1}{4}}}{2}\right) = 6.6$

Vergleich mit den Randwerten:

$$\lim_{u \to 0^+} s(u) \rightarrow \infty \qquad \lim_{u \to \infty} s(u) \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ absolutes Minimum: $s_{min} = 6.6$