mathphys-online

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

$$
\begin{array}{llllllllllll}
(1) & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
(2) & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
(3) & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\ldots & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
(m) & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

Inhaltsverzeichnis

Graphiken erstellt mit Mathcad 15

Lineare Gleichungssysteme

1 Bestimmung von Funktionstermen

Beim Aufstellen von Funktionstermen aus gegebenen Punkten oder aus Bedingungen kommen lineare Gleichungssysteme vor.

Gesucht ist der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \wedge \quad a_n \neq 0$
Es gibt also $n+1$ Unbekannte $\{a_0; a_1; a_2, \ldots, a_{n-2}; a_{n-1}; a_n\}$, d. h. es werden n+1 Bedingungen zur Bestimmung der Koeffizienten a_k benötigt.

Durch Einsetzen der Bedingungen bekommt man ein $(n+1)\times(n+1)$-**Gleichungssystem**, bestehend aus n+1 Gleichungen für n+1 Unbekannte a_k.

Beispiel 1

Berechnen Sie den Funktionsterm g der Geraden durch die Punkte $P(2/1)$ und $Q(4/3)$.

Ansatz: $g(x) = a \cdot x + b$

Gleichung (1): $P \in g:\ 2 \cdot a + b = 1$
Gleichung (2): $Q \in g:\ 4 \cdot a + b = 3$

$\boxed{(2\times 2)-\text{GLS}}$

Beispiel 2

Berechnen Sie den Funktionsterm p der Parabel durch die Punkte
$P(-1/-2)$, $Q(3/6)$ und $R(-3/0)$.

Ansatz: $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Gleichung (1): $P \in G_p:\ a - b + c = -2$
Gleichung (2): $Q \in G_p:\ 9a + 3b + c = 6$
Gleichung (3): $R \in G_p:\ 9a - 3b + c = 0$

$\boxed{(3\times 3)-\text{GLS}}$

Beispiel 3

Berechnen Sie den Funktionsterm f einer Polynomfunktion 3. Grades durch die Punkte
$P(1/2)$, $Q(-1/0)$, $R(2/0)$ und $S(3/4)$.

Ansatz: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Gleichung (1): $P \in G_f:\ a + b + c + d = 2$
Gleichung (2): $Q \in G_f:\ -a + b - c + d = 0$
Gleichung (3): $R \in G_f:\ 8a + 4b + 2c + d = 0$
Gleichung (4): $S \in G_f:\ 27a + 9b + 3c + d = 4$

$\boxed{(4\times 4)-\text{GLS}}$

2 Das Additionsverfahren

2.1 Der Algorithmus

Beim Additionsverfahren werden die Gleichungen des Gleichungssystems mit einer reellen Zahl so multipliziert, dass sich bei der Addition der beiden Gleichungen eine Unbekannte aufhebt.

Gegeben ist ein (2×2) -Gleichungssystem

$$\begin{array}{llcllcl} \text{(I)} & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ \text{(II)} & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

$$a_{22}\cdot(1) - a_{12}\cdot(2) \quad a_{11}\,a_{22}\,x_1 - a_{12}\,a_{21}\,x_1 = a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2$$

$$(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\cdot x_1 = a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2$$

$$x_1 = \frac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

$$a_{21}\cdot(1) - a_{11}\cdot(2) \quad a_{21}\,a_{12}\,x_2 - a_{11}\,a_{22}\,x_2 = a_{21}\,b_1 - a_{11}\,b_2$$

$$(a_{21}\,a_{12} - a_{11}\,a_{22})\cdot x_2 = a_{21}\,b_1 - a_{11}\,b_2$$

$$x_2 = \frac{a_{21}\,b_1 - a_{11}\,b_2}{a_{21}\,a_{12} - a_{11}\,a_{22}} = \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}}$$

Konkrete Lösung eines (2×2) -Gleichungssystem siehe 2.2.

Gegeben ist ein (3×3) -Gleichungssystem

$$\begin{array}{llcllcllcl} \text{(I)} & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & = & b_1 \\ \text{(II)} & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{22}\,x_3 & = & b_2 \\ \text{(III)} & a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & = & b_3 \end{array}$$

Die Bestimmung und Darstellung der allgemeinen Lösung dieses Gleichungssystems ist zu umfangreich und unübersichtlich, und wird deshalb nicht ausgeführt.

Konkrete Lösung eines (3×3) -Gleichungssystem siehe 2.2.

2.2 Lösung zu den Beispielen:

Zu Beispiel 1

(1) $2 \cdot a + b = 1$

(2) $4 \cdot a + b = 3$

Additionsverfahren: $(2) - (1)\ \ 2a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1;\ b = 3 - 4a = 3 - 4 = -1;$

Funktionsterm der Geraden: $g(x) = x - 1$

Zu Beispiel 2

(1) $a - b + c = -2$

(2) $9a + 3b + c = 6$

(3) $9a - 3b + c = 0$

Additionsverfahren:

$(2) - (1) = (4)\quad 8a + 4b = 8$

$(3) - (1) = (5)\quad 8a - 2b = 2$

$(4) - (5) = (6)\quad 6b = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 1;\ 8a = 2 + 2b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{8} \cdot (2 + 2) = \frac{1}{2}$

$c = -2 - a + b = -2 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$

Funktionsterm der Parabel: $p(x) = \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{3}{2}$

Zu Beispiel 3

(1) $a + b + c + d = 2$

(2) $-a + b - c + d = 0$

(3) $8a + 4b + 2c + d = 0$

(4) $27a + 9b + 3c + d = 4$

Additionsverfahren:

$(2) - (1) = (5)\quad -2a - 2c = -2$

$(3) - (1) = (6)\quad 7a + 3b + c = -2$

$(4) - (1) = (7)\quad 26a + 8b + 2c = 2$

$3 \cdot (7) - 8 \cdot (6) = (8)\quad 22a - 2c = 22$

(5) $a + c = 1$

(8) $11a - c = 11$

$(5) + (8)\quad 12a = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 1;\ c = 0;$

In (6) $\quad b = \frac{1}{3} \cdot (-2 - 7a - c) = \frac{1}{3} \cdot (-2 - 7) = -3$

In (1) $\quad d = 2 - a - b - c = 2 - 1 + 3 = 4$

Funktionsterm der ganzrationalen Funktion: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

3 Mathematische Begriffe aus der linearen Algebra

3.1 Die Matrix

Um von der Bezeichnung der jeweiligen Variablen unabhängig zu werden, wird folgende Darstellung festgelegt:
Das **lineare Gleichungssystem** mit den Unbekannten $\{x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ ....,\ x_{n-1}\ ,\ x_n\}$ hat die Form:

(1)	$a_{11}x_1$	$+$	$a_{12}x_2$	$+$	$a_{13}x_3$	$+$	...	$+$	$a_{1n}x_n$	$=$	b_1
(2)	$a_{21}x_1$	$+$	$a_{22}x_2$	$+$	$a_{23}x_3$	$+$	...	$+$	$a_{2n}x_n$	$=$	b_2
(3)	$a_{31}x_1$	$+$	$a_{32}x_2$	$+$	$a_{33}x_3$	$+$	...	$+$	$a_{3n}x_n$	$=$	b_3
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
(m)	$a_{m1}x_1$	$+$	$a_{m2}x_2$	$+$	$a_{m3}x_3$	$+$	...	$+$	$a_{mn}x_n$	$=$	b_m

Das kann mithilfe einer Matrix A und eines Spaltenvektors $\vec{x}$ auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot \vec{x} = \vec{b}\,;$$

Eine reelle $(m \times n)$-Matrix A ist ein System von $m \cdot n$ reellen Zahlen a_{ik} mit $i \in \{1, 2, ...m\}$ und $k \in \{1, 2, ...n\}$, die in einem Schema aus m Zeilen und n Spalten folgendermaßen angeordnet sind:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ik} & . & a_{in} \\ . & . & ... & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mk} & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Bezeichnungen</u>

$m = n$: quadratische Matrix

$n = 2$: **2–reihige quadratische Matrix** $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$n = 3$: **3–reihige quadratische Matrix** $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$n = 4$: **4–reihige quadratische Matrix** $A_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

Zurück zum Gleichungssystem: Für die zeilenweise Darstellung wird eine (Skalar-) Multiplikation „Zeile mal Spalte“ durchgeführt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & . & a_{in} \\ . & . & \dots & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & . & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_k \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_i \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation: $a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1k}\,x_k + \ldots + \ldots a_{1n}\,x_n = b_1$
usw.

Die a_{ik} heißen **Koeffizienten** des Systems. Die Lösung ist ein **n-Tupel** von Zahlen

$(x_1 / x_2 / x_3 / \ldots / x_n)$, sie kann auch als **Vektor** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Bezeichnungen

$A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ heißt **homogenes** Gleichungssystem, $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ **inhomogenes** Gleichungssystem.

Darstellung von Gleichungssystemen

Z. B. ein (2×2)-Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Koeffizientenmatrix

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Systemmatrix

$A_{erw} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$

Z. B. ein (3×3)-Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Koeffizientenmatrix

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Systemmatrix

$A_{erw} = A \,|\, \vec{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$

Ziel:
- ♠ Wann ist das $(m \times n)$-System überhaupt lösbar?
- ♠ Wann hat das $(m \times n)$-System genau eine Lösung?
- ♠ Wie findet man die Lösungen?
- ♠ Wie stellt man die Lösungen übersichtlich dar.

3.2 Rang einer Matrix

Die Matrix wird mithilfe von **Äquivalenzumformungen**, z.B.

- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ($\neq 0$)
- Ersetzen einer Zeile durch die Summe aus ihr und dem Vielfachen einer anderen
-

in ***Dreiecksform*** gebracht.

Dabei unterscheidet man die ***obere Dreiecksmatrix*** A_{Δ_o} oder ***untere Dreiecksmatrix*** A_{Δ_u} :

$$A_{\Delta_o} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ oder } A_{\Delta_u} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Sind die Einträge oberhalb und unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null, so spricht man von einer ***Diagonalmatrix***: $A_{diag} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

<u>Beispiele zur Umformung in die (obere) Dreiecksform</u>

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(III)-(I)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ keine Nullzeile}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(III)-(I)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(III)-(II)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Nullzeile}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[(III)-3\cdot(I)]{(III)-2\cdot(I)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{Nullzeile} \\ \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

A_1, A_2 und A_3 besitzen zwar dasselbe Format, bringen jedoch beim Umformen verschieden viele ***Nullzeilen*** hervor.

<u>Definition</u>

Unter dem **Rang einer Matrix** (Rg M) versteht man die **Anzahl der von der Nullzeile verschiedenen Zeilen,** die bei der Umformung auf Dreiecksform übrig bleiben.
Die Zeilen oder Spalten einer Matrix heißen dann linear unabhängig.

$\mathrm{Rg}(A_1) = \mathbf{3}$; $\mathrm{Rg}(A_2) = \mathbf{2}$; $\mathrm{Rg}(A_3) = \mathbf{1}$;

3.3 Determinante

3.3.1 Zweireihige Determinanten

Gegeben ist die quadratische Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Dann wird die Determinante folgendermaßen berechnet:

$$D = \det(A) = |A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Merkregel: ***Hauptdiagonale minus Nebendiagonale***

3.3.2 Dreireihige Determinanten

Gegeben ist die quadratische Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Gesucht: $\det A = |A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right|$

Berechnung der Determinante nach der ***Regel von Sarrus***: Setuze die ersten beiden Spalten neben die Matrix, dann
Summe der Hauptdiagonalen minus Summe der Nebendiagonalen

$$\det A = |A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12} \end{matrix}$$

Die Regel von Sarrus ist nur sinnvoll für zwei- und dreireihige Determinanten.
Für n-reihige Determinanten ist die ***Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte*** möglich.

Z. B. „*Entwicklung nach der ersten Spalte*“

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right|$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| + (-1)^{3+1} \cdot a_{31} \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right|$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$

4 Determinantenverfahren

4.1 Die Cramersche Regel

4.1.1 (2x2)-Gleichungssystem

Gegeben ist das Gleichungssystem

(1) $a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1$

(2) $a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2$

bzw. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Es hat die Lösungen

$$x_1 = \frac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}}$$

Verwendet man die Schreibweise mit den Matrizen für die Koeffizientenmatrix, dann kann die Determinante berechnet werden:

Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Koeffizientendeterminante $D = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$ (vgl. die Nenner)

Dieses Schema kann mit einer Veränderung auch auf die Zähler der Lösungen angewendet werden:

$$D_1 = \left| \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \right| = b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12} \quad \text{(vgl. Zähler von } x_1\text{)}$$

$$D_2 = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \right| = a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1 \quad \text{(vgl. Zähler von } x_2\text{)}$$

Damit können die Lösungen sehr elegant berechnet werden: Man ersetzt für den Zähler die erste oder zweite Spalte durch den Vektor $\vec{b}$ und berechnet die Determinante.
Für den Nenner wird die Determinante der Koeffizientenmatrix berechnet.

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\left| \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right|} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\left| \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right|}$$

Die Regel funktioniert auch für (3x3)- oder (4x4)-Gleichungssysteme usw. Es ist allerdings wegen der Berechnung der jeweiligen Determinanten nur für (3x3)-Gleichungssysteme praktikabel.

4.1.2 (3x3)-Gleichungssystem

Gegeben ist das Gleichungssystem

(1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

(2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$

(3) $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

bzw.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Koeffizientendeterminante $D = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right|$ (vgl. die Nenner)

Determinanten für die Zähler

$$D_1 = \left| \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| \;;\; D_2 = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} \right| \;;\; D_3 = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \right| \;;$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\left| \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right|} \;;$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\left| \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right|} \;;$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right|}$$

4.2 Lösung zu den Beispielen

<u>Zu Beispiel 1</u>

Systemmatrix: $A_{erw} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Determinanten: $D = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1-4=-2;\ D_1 = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1-3=-2;\ D_2 = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right| = 6-4=2$

Lösungen: $a = \frac{D_1}{D} = \frac{-2}{-2} = 1;\ b = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1;$

<u>Zu Beispiel 2</u>

Systemmatrix: $A_{erw} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Determinanten:

$$D = \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|;\ D_1 = \left|\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|;\ D_2 = \left|\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|;\ D_3 = \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 9 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$a = \frac{D_1}{D} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{(-1)^{1+1}(-2)\cdot(3+3)+(-1)^{2+1}\cdot 6\cdot(-1+3)}{(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot(3+3)+(-1)^{2+1}\cdot 9\cdot(-1+3)+(-1)^{3+1}\cdot 9\cdot(-1-3)} = \frac{1}{2};$$

$$b = \frac{D_2}{D} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|} = 1; \qquad c = \frac{D_3}{D} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 9 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right|} = -\frac{3}{2}$$

5 Das Verfahren nach Gauß

5.1 Der Gauß-Algorithmus

Besonders schnell lassen sich lineare Gleichungssysteme lösen, wenn sie in **Dreiecksform** (von Zeile zu Zeile eine Unbekannte weniger) bzw. **Stufenform** (mindestens eine Unbekannte weniger) vorliegen. Der bedeutendste deutsche Mathematiker **Carl Friedrich Gauß** (3.1.1777 – 5.12.1859) hat ein Verfahren angegeben, mit dem sich lineare Gleichungssysteme auf Dreiecksform bringen und dann bequem lösen lassen.

$$\begin{array}{llllllllllll}
(1) & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
(2) & & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
(3) & & & & & a_{33}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
(m) & & & & & & & & & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Das Verfahren verallgemeinert das bekannte Additionsverfahren.

Der **Gauß-Algorithmus** beruht auf zwei elementaren Umformungen, die die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändern, den **Äquivalenzumformungen:**

- **Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl ungleich Null**
- **Ersetzen einer Gleichung durch die Summe aus ihr und dem Vielfachen einer anderen.**

Allgemeines (2x2)-Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \xrightarrow{a_{11}\cdot(II)-a_{21}\cdot(I)} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ \color{red}{0} & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} & a_{11}b_2-a_{21}b_1 \end{array}\right)$$

2. Zeile: $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$

1. Zeile: $a_{11}x_1 + a_{12}\cdot\dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = b_1$

Auflösen: $x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\cdot\dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\right)$

Hauptnenner: $x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\cdot\dfrac{b_1a_{11}a_{22} - b_1a_{21}a_{12} - a_{12}a_{11}b_2 + a_{12}a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$

Vereinfachen: $x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\cdot\dfrac{b_1a_{11}a_{22} - a_{12}a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$;

Kürzen: $x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$

5.2 Lösung zu den Beispielen

Zu Beispiel 1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(II)-2\cdot(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Auflösen von unten nach oben:

2. Zeile: $-b = 1 \Rightarrow b = -1;$

1. Zeile: $2a + b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \cdot (1-b) = \frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1$

Funktionsterm: $\underline{\underline{g(x) = x - 1}}$

Rangbetrachtung:

$$Rg(A) = Rg\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 2; \quad Rg(A_{erw}) = Rg\left(\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\right) = 2$$

Zu Beispiel 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(III)-9\cdot(I)]{(II)-9\cdot(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 12 & -8 & 24 \\ 0 & 6 & -8 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot(III)-(II)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 12 & -8 & 24 \\ 0 & 0 & -8 & 12 \end{array}\right)$$

3. Zeile: $-8c = 12 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{3}{2};$

2. Zeile: $12b - 8c = 24 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{12} \cdot \left(24 + 8 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\right) = 1;$

1. Zeile: $a - b + c = -2 \quad \Rightarrow \quad a = -2 + b - c = -2 + 1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Funktionsterm: $\underline{\underline{p(x) = 2x^2 + 6x - 8}}$

Rangbetrachtung:

$$Rg(A) = Rg\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\right) = 3; \quad Rg(A_{erw}) = Rg\left(\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 12 & -8 & 24 \\ 0 & 0 & -8 & 12 \end{array}\right)\right) = 3$$

Zu Beispiel 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(III)-8\cdot(I)\\(IV)-27\cdot(I)}]{(II)+(I)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -16 \\ 0 & -18 & -24 & -26 & -50 \end{array}\right) \xrightarrow[(IV)+9\cdot(II)]{(III)+2\cdot(II)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & -24 & -8 & -32 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{8}\cdot(III)]{\frac{1}{2}\cdot(II)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot(IV)-3\cdot(III)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

4. Zeile: $-d = -4 \quad \Rightarrow \quad d = 4$

3: Zeile: $-2c - d = -4 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{2}\cdot(-4+d) = -\frac{1}{2}\cdot(-4+4) = 0$

2. Zeile: $2b + 2d = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -d + 1 = -4 + 1 = -3$

1. Zeile: $a + b + c + d = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2 - b - c - d = 2 - (-3) - 0 - 4 = 1$

Funktionsterm: $f(x) = \underline{\underline{x^3 - 3x^2 + 4}}$

Rangbetrachtung:

$$Rg(A) = Rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 4; \quad Rg(A_{erw}) = Rg\left(\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)\right) = 4$$

6 Lösbarkeitskriterien

Satz: Ein System mit n Gleichungen und n Unbekannten ist genau dann

lösbar, falls $\Leftrightarrow \quad Rg(A) = Rg(A_{erw})$

es hat **genau eine Lösung** $\Leftrightarrow \quad Rg(A) = Rg(A_{erw}) = n$

es hat **unendlich viele Lösungen** $\Leftrightarrow \quad Rg(A) = Rg(A_{erw}) = m \quad \wedge \quad m < n$

$m = n - 1$: Wahl von einem freien Parameter
$m = n - 2$: Wahl von zwei freier Parameter
....
$m = n - k$: Wahl von k freien Parametern

Satz: Ein System mit n Gleichungen und n Unbekannten ist genau dann

unlösbar, falls $\Leftrightarrow \quad Rg(A) \neq Rg(A_{erw})$

7 Lösbarkeit im IR^2

Die Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen lässt sich auch geometrisch veranschaulichen. Jede der beiden Gleichungen beschreibt eine Gerade im IR^2:

7.1 Genau eine Lösung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{(II)-3\cdot(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

2. Zeile: $-5 = -15 \Rightarrow y = 3$;
1. Zeile: $x + 2\cdot 3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 2$;
Lösung: $x = 2; y = 3$;

Rangbetrachtung:

$$Rg(A) = Rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\right) = 2$$

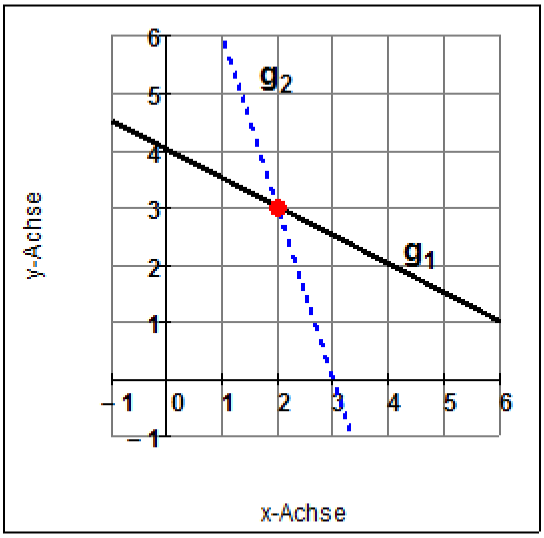
$$Rg(A_{erw}) = Rg\left(\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -15 \end{array}\right)\right) = 2$$

$Rg(A) = Rg(A_{erw}) = 2$, gleich der Anzahl der Gleichungen, also **genau eine** Lösung.

Gerade g_1: $x + 2y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 4$;

Gerade g_2: $3x + y = 9 \quad \Rightarrow \quad y = -3x + 9$;

Graphische Veranschaulichung:



Die Geraden schneiden sich.

$g_1 \cap g_2: -\frac{1}{2}x + 4 = -3x + 9 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{2}x = 5 \;\Leftrightarrow\; x_S = 2;\; y_s = g_1(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 3$

Die Lösung ist der Schnittpunkt $S(2/3)$.

7.2 Keine Lösung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{(II)-(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$0 \neq 4$ also keine Lösung

Rangbetrachtung:

$$Rg(A) = Rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

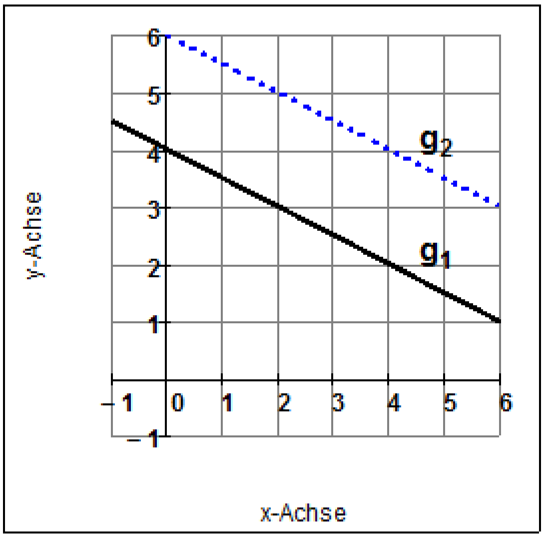
$$Rg(A_{erw}) = Rg\left(\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)\right) = 2$$

$Rg(A) \neq Rg(A_{erw})$, also **keine** Lösung.

Gerade g_1: $x + 2y = 8 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + 4$;

Gerade g_2: $x + 2y = 12 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + 6$;

Graphische Veranschaulichung:



Die Geraden sind parallel.

7.3 Unendlich viele Lösungen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ -2 & -4 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow{(II)+2\cdot(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ Nullzeile}$$

Wähle: $y = \lambda \;\Rightarrow\; x + 2\lambda = 8 \;\Rightarrow\; x = 8 - 2\lambda$

Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 - 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \wedge \lambda \in IR$.

Rangbetrachtung:

$$Rg(A) = Rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

$$Rg(A_{erw}) = Rg\left(\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right) = 1$$

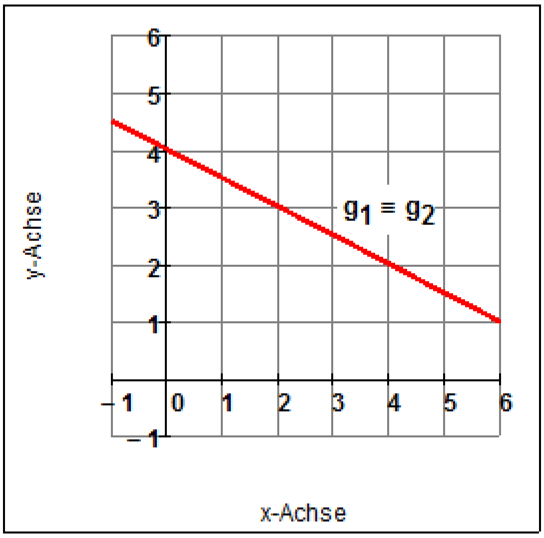
$Rg(A) = Rg(A_{erw}) = 1$, kleiner als Anzahl der Gleichungen, also **unendlich viele** Lösungen.

Gerade g_1: $x + 2y = 8 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + 4$;

Gerade g_2: $-2x - 4y = -16 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + 4$;

Die Geraden sind identisch.

Graphische Veranschaulichung:



8 Lösbarkeit im IR^3

8.1 Genau eine Lösung

Beispiel 1

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -12 \\ \text{(II)} & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 17 \\ \text{(III)} & -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 1 & -1 & 4 & 17 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)+2·(I)}]{\text{(II)−(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 0 & -3 & 8 & 29 \\ 0 & 6 & -7 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(III)+2·(II)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 0 & -3 & 8 & 29 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{array}\right)$$

3. Zeile: $9x_3 = 36 \Rightarrow x_3 = 4$;

2. Zeile: $-3x_2 + 8 \cdot 4 = 29 \Rightarrow x_2 = 1$;

1. Zeile: $x_1 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = -12 \Rightarrow x_1 = 2$;

Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Rangbetrachtung:

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\right) = 3; \quad \text{Rg}(A_{erw}) = \text{Rg}\left(\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -12 \\ 0 & -3 & 8 & 29 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{array}\right)\right) = 3$$

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A_{erw}) = 3$, gleich der Anzahl der Gleichungen, also **genau eine** Lösung.

8.2 Unendlich viele Lösungen

Beispiel 2

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{(I)} & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 13 \\ \text{(II)} & -9x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & = & -26 \\ \text{(III)} & 6x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 19 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 13 \\ -9 & 10 & 3 & -26 \\ 6 & -5 & -2 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)−2·(I)}]{\text{(II)+3·(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 13 & 0 & 13 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{13·(III)+7·(II)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2. Zeile: $x_2 = 1$;

1. Zeile: Wähle $x_3 = \lambda$; $3x_1 + 1 - \lambda = 13 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}\lambda + 4$

Unendlich viele Lösungen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\lambda + 4 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$

Rangbetrachtung:

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2; \quad \text{Rg}(A_{erw}) = \text{Rg}\left(\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right) = 2$$

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A_{erw}) = 2$, kleiner der Anzahl der Gleichungen, also **unendlich viele** Lösungen (mit einem freien Parameter).

Beispiel 3

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{(I)} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ \text{(II)} & -4x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\ \text{(III)} & 8x_1 & - & 12x_2 & + & 4x_3 & = & 8 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -4 & 6 & -2 & -4 \\ 8 & -12 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)}-4\cdot\text{(I)}]{\text{(II)}+2\cdot\text{(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. Zeile: Wähle $x_3 = \lambda$; $x_2 = \mu$;

Einsetzen: $2x_1 - 3\mu + \lambda = 2 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{3}{2}\mu - \frac{1}{2}\lambda + 1;$

Unendlich viele Lösungen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\mu - \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$

Rangbetrachtung:

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2; \quad \text{Rg}(A_{erw}) = \text{Rg}\left(\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right) = 2$$

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A_{erw}) = 1$, kleiner der Anzahl der Gleichungen, also **unendlich viele** Lösungen (mit zwei freien Parametern).

8.3 Keine Lösung

Beispiel 4

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{(I)} & x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ \text{(II)} & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ \text{(III)} & 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)}-2\cdot\text{(I)}]{\text{(II)}-\text{(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(III)}-3\cdot\text{(II)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

3. Zeile: $0 \neq 3$, es gibt keine Lösung.

Rangbetrachtung:

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2; \quad \text{Rg}(A_{\text{erw}}) = \text{Rg}\left(\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)\right) = 3$$

$\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A_{\text{erw}})$, ungleich der Anzahl der Gleichungen, also **keine** Lösung.

Beispiel 5

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{(I)} & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ \text{(II)} & -2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ \text{(III)} & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 9 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)}+\text{(I)}]{\text{(II)}+2\cdot\text{(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(III)}-\text{(II)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2. Zeile: $0 \neq 1$, also keine Lösung.

Rangbetrachtung:

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1; \quad \text{Rg}(A_{\text{erw}}) = \text{Rg}\left(\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right) = 2$$

$\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A_{\text{erw}})$, also **keine** Lösung.

Beispiel 6

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 6 \\
\text{(II)} & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\
\text{(III)} & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)+(I)}]{\text{(II)}-2\cdot\text{(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

3. Zeile: $0 \neq 7$, also keine Lösung;

Rangbetrachtung:

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2; \quad \text{Rg}(A_{\text{erw}}) = \text{Rg}\left(\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)\right) = 3$$

$\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A_{\text{erw}})$, also **keine** Lösung.

Beispiel 7

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & x_1 & + & 8x_2 & + & 8x_3 & = & 4 \\
\text{(II)} & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 8 \\
\text{(III)} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)}-\text{(I)}]{\text{(II)+(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 8 & 4 \\ 0 & 9 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[9\cdot\text{(III)}+7\cdot\text{(II)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 8 & 4 \\ 0 & 9 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 46 \end{array}\right)$$

3. Zeile: $0 \neq 17$, also keine Lösung;

Rangbetrachtung:

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2; \quad \text{Rg}(A_{\text{erw}}) = \text{Rg}\left(\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right)\right) = 3$$

$\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A_{\text{erw}})$, also **keine** Lösung.

Bemerkung

Die Beispiele 1 bis 7 können auch als **Lage dreier Ebenen** zueinander im IR^3 interpretiert werden.

9 Über- und unterbestimmte Gleichungssysteme

Definition

Sind **mehr lineare Gleichungen als Variable** gegeben, so heißt das Gleichungssystem **überbestimmt**.

Lösung

1. Beschränkung auf die Anzahl von Gleichungen, die der Anzahl der Variablen entspricht.
2. Bestimmung der Lösbarkeit über den Rang und Bestimmung der Lösung.
3. Existiert **eine Lösung**, diese zur Probe in die restlichen Gleichungen einsetzen. Das Gleichungssystem hat dann entweder **genau eine Lösung** oder **keine Lösung**.
4. Existieren **unendlich viele Lösungen**, diese zur Probe in die restlichen Gleichungen einsetzen. Das Gleichungssystem hat dann entweder **genau eine Lösung** oder **keine Lösung** oder **unendlich viele Lösungen.**
5. Existiert keine Lösung, so hat das gesamte Gleichungssystem keine Lösung.

Definition

Sind **weniger lineare Gleichungen als Variable** gegeben, so heißt das Gleichungssystem **unterbestimmt**.

Lösung

1. Bringe die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Stufenform (Gauß-Algorithmus).

   Falls $\boxed{\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A_{erw})}$, ist das Gleichungssystem lösbar.

2. Führe zur Berechnung der Lösung einen oder mehrere **freie Parameter** ein.