Beispiele zur Integration mithilfe Unter- und Obersummen

made with mathcad

Beispiel 1 a

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen im angegebenen Intervall J streng monoton zunehmen, und berechnen Sie jeweils die zugehörige Ober- und Untersumme bei einer Zerlegung des Intervalls J in n gleichbreite Intervalle.

$f(x) := -\frac{1}{4} \cdot x^2 - x + 4$; $J = [\,-6\,;\,-2\,]$; $n = 5$;

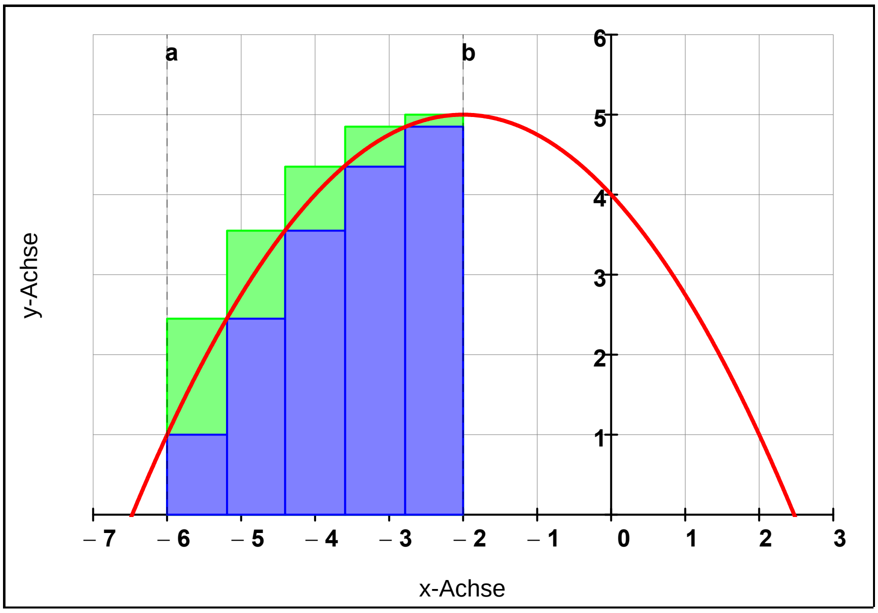
$f(x) = 4 - x - \frac{x^2}{4}$ $\qquad f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow -\frac{x}{2} - 1$ $\qquad a := -6$ $\qquad b := -2$

$x_S := f'(x) = 0 \rightarrow -\frac{x}{2} - 1 = 0$ auflösen, $x \rightarrow -2$ $\qquad x_S = -2$ $\qquad y_S := f(x_S) = 5$

G_f ist streng monoton steigend in $x \in]\,-\infty\,;\,-2\,]$ und G_f ist streng monoton fallend in $x \in [\,-2\,;\,\infty\,[$.

Intervallbreite: $b - a = 4$ $\qquad$ Unterteilung: $n := 5$ $\qquad$ Streifenbreite: $\Delta x := \frac{b-a}{n} = \frac{4}{5} = 0.8$

Darstellung



linke Intervallgrenze:

$i := 1 .. 5$

$z_{i-1} := a + \Delta x \cdot (i - 1)$

rechte Intervallgrenze:

$j := 1 .. 5$

$z_j := a + \Delta x \cdot (j)$

linke Intervallgrenze:

z_{i-1} =	$f(z_{i-1})$ =
-6	1
-5.2	2.44
-4.4	3.56
-3.6	4.36
-2.8	4.84

rechte Intervallgrenze:

z_j =	$f(z_j)$ =
-5.2	2.44
-4.4	3.56
-3.6	4.36
-2.8	4.84
-2	5

Untersumme:

$$U_5 := \Delta x \cdot (f(a) + f(a + \Delta x \cdot 1) + f(a + \Delta x \cdot 2) + f(a + \Delta x \cdot 3) + f(a + \Delta x \cdot 4))$$

$$U_5 = 0.8 \cdot (f(-6) + f(-5.2) + f(-4.4) + f(-3.6) + f(-2.8))$$

$$U_5 = 0.8 \cdot (1 + 2.44 + 3.56 + 4.36 + 4.84)$$

$$U_5 = 12.96$$

Obersumme:

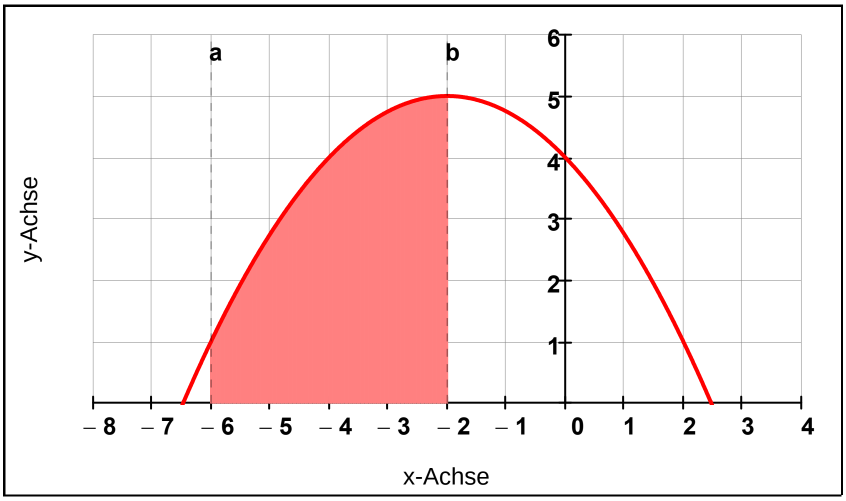
$$O_5 := \Delta x \cdot (f(a + \Delta x \cdot 1) + f(a + \Delta x \cdot 2) + f(a + \Delta x \cdot 3) + f(a + \Delta x \cdot 4) + f(a + \Delta x \cdot 5))$$

$$O_5 = 0.8 \cdot (f(-5.2) + f(-4.4) + f(-3.6) + f(-2.8) + f(-2))$$

$$O_5 = 0.8 \cdot (2.44 + 3.56 + 4.36 + 4.84 + 5)$$

$$O_5 = 16.16$$

Flächenberechnung durch Integration: $A := \int_a^b f(x)\,dx$ $\quad A = 14.67$



Beispiel 1b

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen im angegebenen Intervall J streng monoton zunehmen, und berechnen Sie jeweils die zugehörige Ober- und Untersumme bei einer Zerlegung des Intervalls J in n gleichbreite Intervalle.

$g(x) := \frac{1}{3} \cdot x^2 - x - 3$; $J = [\ 2\ ;\ 4\ ]$; $n = 4$;

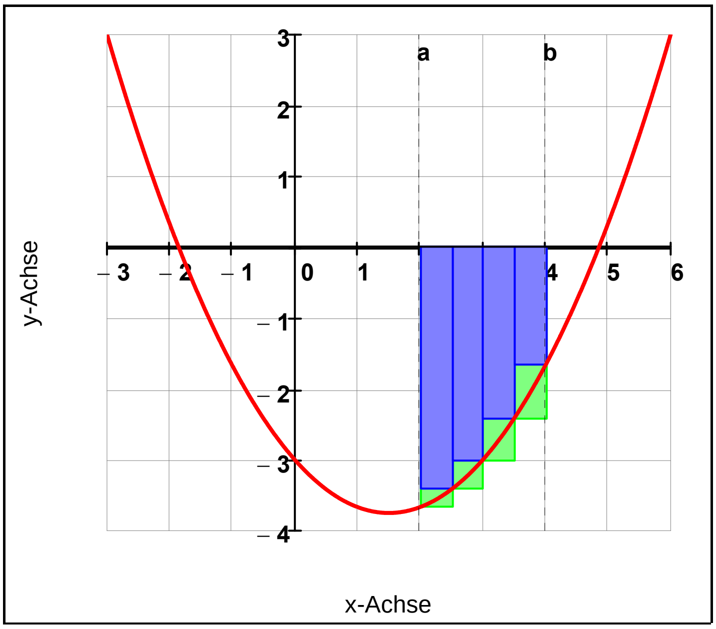
$g(x) = \frac{x^2}{3} - x - 3$ $\quad g'(x) := \frac{d}{dx} g(x) \rightarrow \frac{2 \cdot x}{3} - 1$ $\quad a := 2$ $\quad b := 4$

$x_S := g'(x) = 0 \rightarrow \frac{2 \cdot x}{3} - 1 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \frac{3}{2}$ $\quad x_S = 1.5$ $\quad y_S := g(x_S) = -\frac{15}{4} = -3.8$

G_f ist streng monoton fallend in $x \in]\ -\infty\ ;\ \frac{3}{2}\ ]$ und G_f ist streng monoton steigend in $x \in [\ \frac{3}{2}\ ;\ \infty\ [$.

Intervallbreite: $b - a = 2$ $\quad$ Unterteilung: $n := 4$ $\quad$ Streifenbreite: $\Delta x := \frac{b - a}{n} = \frac{1}{2} = 0.5$

Darstellung



linke Intervallgrenze:

$i := 1 .. 4$

$z_{i-1} := a + \Delta x \cdot (i - 1)$

rechte Intervallgrenze:

$j := 1 .. 4$

$z_j := a + \Delta x \cdot (j)$

linke Intervallgrenze:

$z_{i-1} =$	$g(z_{i-1}) =$
2	-3.67
2.5	-3.42
3	-3
3.5	-2.42

rechte Intervallgrenze:

$z_j =$	$g(z_j) =$
2.5	-3.42
3	-3
3.5	-2.42
4	-1.67

Untersumme:

$$U_4 := \left|\Delta x\cdot(g(a+\Delta x\cdot 1)+g(a+\Delta x\cdot 2)+g(a+\Delta x\cdot 3)+g(a+\Delta x\cdot 4))\right|$$

$$U_4 = \left|0.5\cdot(g(2.5)+g(3)+g(3.5)+g(4))\right|$$

$$U_4 = \left|0.5\cdot(-3.42-3-2.42-1.67)\right|$$

$$U_4 = 5.25$$

Obersumme:

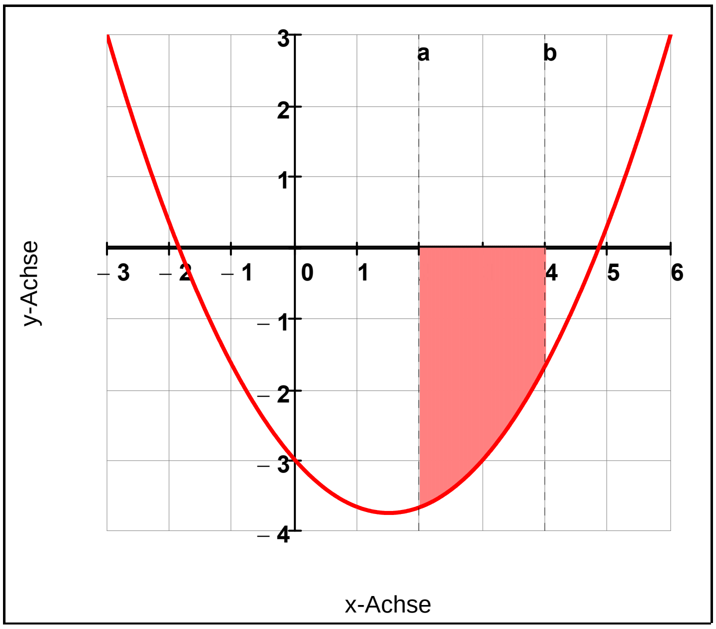
$$O_4 := \left|\Delta x\cdot(g(a)+g(a+\Delta x\cdot 1)+g(a+\Delta x\cdot 2)+g(a+\Delta x\cdot 3))\right|$$

$$O_4 = \left|0.5\cdot(g(2)+g(2.5)+g(3)+g(3.5))\right|$$

$$O_4 = \left|0.5\cdot(-3.67-3.42-3-2.42)\right|$$

$$O_4 = 6.25$$

Flächenberechnung durch Integration: $A := \left|\int_a^b g(x)\,dx\right|$ $A = 5.78$



Beispiel 2a

Die Graphen der folgenden Funktionen schließen jeweils mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen **x = a** und **x = b** ein Flächenstück ein. Schätzen Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstücks durch Berechnung der zugehörigen Ober- und Untersumme mit **Δx = 0.5** ab.

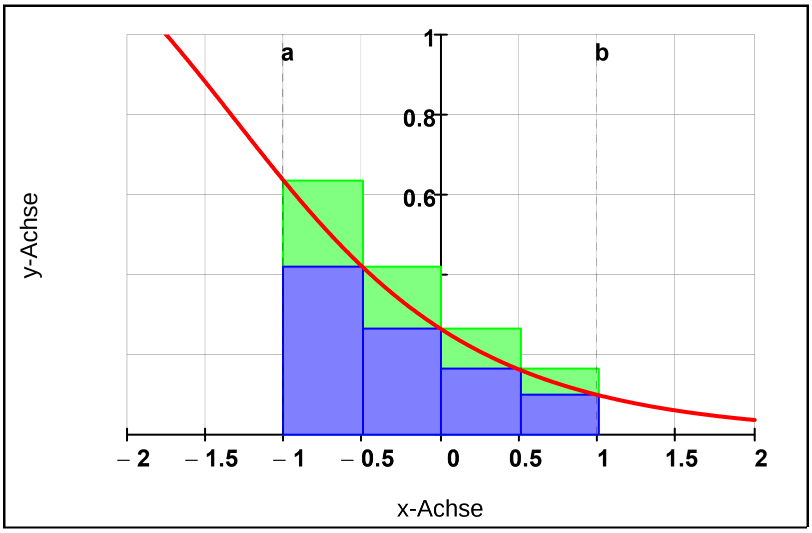
$f(x) := \arctan\left(2\cdot e^{-x-2}\right)$; $D_f = IR$; $a = -1$; $b = 1$;

$f(x) = \operatorname{atan}\left(2\cdot e^{-x-2}\right)$ $\qquad a := -1 \qquad b := 1 \qquad \Delta x := 0.5 \qquad n := 4$

$$f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{2\cdot e^{-x-2}}{4\cdot e^{-2\cdot x-4}+1}$$

$f'(x) < 0$ auflösen, $x \rightarrow x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ G_f ist streng monoton fallend in IR.

▶ Darstellung



$i := 1..4 \qquad j := 1..4$

linke Intervallgrenze:

$z_{i-1} := a + \Delta x\cdot(i-1)$

rechte Intervallgrenze:

$z_j := a + \Delta x\cdot(j)$

linke Intervallgrenze:

$z_{i-1} =$	$f(z_{i-1}) =$
-1	0.634
-0.5	0.42
0	0.264
0.5	0.163

rechte Intervallgrenze:

$z_j =$	$f(z_j) =$
-0.5	0.42
0	0.264
0.5	0.163
1	0.099

Untersumme:

$$U_4 := \Delta x \cdot (f(a + \Delta x \cdot 1) + f(a + \Delta x \cdot 2) + f(a + \Delta x \cdot 3) + f(a + \Delta x \cdot 4))$$

$$U_4 = 0.5 \cdot (f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1))$$

$$U_4 = 0.5 \cdot (0.42 + 0.264 + 0.163 + 0.099)$$

$$U_4 = 0.47$$

Obersumme:

$$O_4 := \Delta x \cdot (f(a) + f(a + \Delta x \cdot 1) + f(a + \Delta x \cdot 2) + f(a + \Delta x \cdot 3))$$

$$O_4 = 0.5 \cdot (f(-1) + f(-0.5) + f(0) + f(0.5))$$

$$O_4 = 0.5 \cdot (0.634 + 0.42 + 0.264 + 0.163)$$

$$O_4 = 0.74$$

Flächenberechnung durch Integration: $A := \int_a^b f(x)\, dx$ $\quad A = 0.60$

Beispiel 2b

Die Graphen der folgenden Funktionen schließen jeweils mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen **x = a** und **x = b** ein Flächenstück ein. Schätzen Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstücks durch Berechnung der zugehörigen Ober- und Untersumme mit $\Delta x = 0.5$ ab.

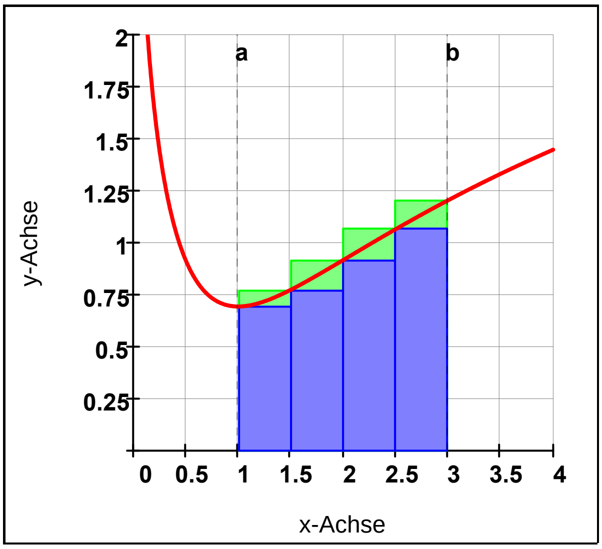
$g(x) := \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$; $D_g = IR^+$; $a = 1$; $b = 3$;

$$g(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \qquad a := 1 \qquad b := 3 \qquad \Delta x := 0.5 \qquad n := 4$$

$$g'(x) := \frac{d}{dx}g(x) = -\frac{x\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2}-2\right)}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x\cdot\left(x^2+1\right)}$$

$g'(x) > 0$ **auflösen**, $x \rightarrow 1 < x \vee -1 < x < 0$ $\qquad$ G_f ist streng monoton steigend in $x \in [\,1\,;\,\infty\,[$

Darstellung



$i := 1..4 \qquad j := 1..4$

linke Intervallgrenze:

$z_{i-1} := a + \Delta x\cdot(i-1)$

rechte Intervallgrenze:

$z_j := a + \Delta x\cdot(j)$

linke Intervallgrenze: $\qquad$ rechte Intervallgrenze:

$z_{i-1} =$	$g(z_{i-1}) =$	$z_j =$	$g(z_j) =$
1	0.693	1.5	0.773
1.5	0.773	2	0.916
2	0.916	2.5	1.065
2.5	1.065	3	1.204

Untersumme:

$$U_4 := \Delta x \cdot (g(a) + g(a + \Delta x \cdot 1) + g(a + \Delta x \cdot 2) + g(a + \Delta x \cdot 3))$$

$$U_4 = 0.5 \cdot (g(1) + g(1.5) + g(2) + g(2.5))$$

$$U_4 = 0.5 \cdot (0.693 + 0.773 + 0.916 + 1.065)$$

$$U_4 = 1.72$$

Obersumme:

$$O_4 := \Delta x \cdot (g(a + \Delta x \cdot 1) + g(a + \Delta x \cdot 2) + g(a + \Delta x \cdot 3) + g(a + \Delta x \cdot 4))$$

$$U_4 = 0.5 \cdot (g(1.5) + g(2) + g(2.5) + g(3))$$

$$U_4 = 0.5 \cdot (0.773 + 0.916 + 1.065 + 1.204)$$

$$O_4 = 1.98$$

Flächenberechnung durch Integration: $A := \int_a^b g(x)\,dx$ $A = 1.85$