Aufgaben zur Binomialverteilung mit Lösung

AP 93/SI

In einer Firma sind zehn Kopiergeräte in Betrieb und arbeiten völlig unabhängig voneinander. Zu einem zufällig ausgewählten Zeitpunkt brennt eine grüne Kontrolllampe mit der Wahrscheinlichkeit 0,6. Berechnen Sie jeweils auf vier Stellen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit, dass zu einem zufällig ausgewählten Zeitpunkt bei
1. genau fünf
2. höchstens zwei der zehn Geräte die grüne Lampe brennt.
3. Ermitteln Sie, bei wie vielen Geräten zu einem Zeitpunkt voraussichtlich die grüne Lampe brennt.

Lösung

1. $B\left(10\,;\,0{,}60\,;\,5\right)=0{,}20066$; 2. $P(k\le 2)=\sum B\left(10\,;\,0{,}60\,;\,2\right)=0{,}01229$; 3. $\mu=n\cdot p=10\cdot 0{,}60=6$

AP 02/SII

Ein großes Internetcafe hat Plätze an 50 PCs. Umfangreiche Untersuchungen haben gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein PC in der Kernzeit belegt ist, für jeden der PCs 0,7 beträgt.
1. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der belegten PCs innerhalb der einfa chen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt mindestens 15 PCs frei sind.

Lösung

1. $n=50\,;\,p=0{,}70 \quad\Rightarrow\quad \mu=n\cdot p=50\cdot 0{,}70=35\,;\quad \sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=3{,}24$

$$P\left(\left|X-\mu\right|<\sigma\right)=P\left(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\right)=P\left(31{,}76<X<38{,}24\right)=F(38)-F(31)$$

$$=\sum B\left(50\,;\,0{,}70\,;\,38\right)-\sum B\left(50\,;\,0{,}70\,;\,31\right)=0{,}86096-0{,}14056=0{,}72040$$

2. mindestens 15 frei $\hat{=}$ höchstens 35 belegt $\Rightarrow\quad F(35)=\sum B\left(50\,;\,0{,}70\,;\,35\right)=0{,}55317$

$$P(X\ge 15)=1-P(X\le 14)=1-\sum B\left(50\,;\,0{,}30\,;\,14\right)=1-0{,}44683=0{,}55317$$

AP 94/SI

Eine Tankstelle besitzt 5 Zapfsäulen. An jeder der Zapfsäulen kann unabhängig voneinander jeweils höchstens ein Fahrzeug betankt werden. Während der Hauptgeschäftszeit ist jede einzelne Zapfsäule mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 besetzt. Berechnen Sie jeweils auf drei Stellen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit, dass zu einem beliebigen Zeitpunkt während der Hauptgeschäftszeit
1. keine der Zapfsäulen
2. höchstens drei Zapfsäulen unbesetzt sind.
3. nur die erste und die letzte Zapfsäule besetzt sind.

Lösung

1. $n=5\,;\,p=0{,}70 \quad\Rightarrow\quad P(k=0)=B\left(5\,;\,0{,}70\,;\,0\right)=0{,}00243\approx 0{,}002$
2. $n=5\,;\,p=0{,}30 \quad\Rightarrow\quad P(k\le 3)=\sum B\left(5\,;\,0{,}30\,;\,3\right)=0{,}96922\approx 0{,}969$
3. Statt Binomialkoeffizient nur eine Möglichkeit: b 0 0 0 b $\quad\Rightarrow\quad 1\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3^3=0{,}01323\approx 0{,}013$

AP 96/SII

Bei Konzerten in der „Symphonie“ sind die Eintrittspreise in drei Preisklassen A, B und C eingeteilt. Erfahrungsgemäß entfallen im freien Kartenverkauf 60% auf die Preisklasse B. Vor einer Vorstellung stehen fünf Konzertbesucher an der Abendkasse an, um je eine Karte zu kaufen.
Berechnen Sie auf jeweils drei Stellen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
1. nur die ersten drei Besucher eine Karte der Preisklasse B kaufen.
2. mindestens ein Besucher keine Karte der Klasse B kauft.
3. Als an der Abendkasse noch drei Karten der Preisklasse B vorrätig sind, steht Herr Mayer an fünfter Stelle. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit Herr Mayer doch noch eine Karte erhält.

Lösung

1. Statt Binomialkoeffizient nur eine Möglichkeit: $B\ B\ B\ \overline{B}\ \overline{B} \quad\Rightarrow\quad 1\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}4^2=0{,}035$

2. $P(k \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 1 - 0{,}6^5 = 0{,}922$

3. Herr Mayer erhält noch eine Karte B, wenn maximal 2 verkauft werden.
Die Karte von Herrn Mayer steht nicht zur Verfügung, deshalb nur noch 4 Karten zum Verkauf.

$P(k \leq 2) = P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2)$

$= \binom{4}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^3 + \binom{4}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}525$

AP 00/SII

Eine Firma stellt Fliesen her. Diese Fliesen haben manchmal einen Farbfehler.
Aus einer sehr großen Menge werden zwei Fliesen zufällig ausgewählt und überprüft. Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Farbfehlers bei einer solchen Fliese höchstens sein dürfte, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, das von den beiden Fliesen mindestens eine einen Farbfehler hat, höchstens 0,0975 beträgt.

Geg.: Bernoulli-Kette der Länge n = 2; p: Wahrscheinlichk. eines Farbfehlers bei einer Fliese;
P(„mindestens eine Fliese hat Farbfehler“) $\leq 0{,}0975$

Lösung: $P(k \geq 1) \leq 0{,}0975 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(k = 0) \leq 0{,}0975$

$P(k = 0) \geq 0{,}9025 \quad \Leftrightarrow \quad \binom{2}{0} \cdot p^0 (1-p)^2 \geq 0{,}9025 \quad \Leftrightarrow \quad (1-p)^2 \geq 0{,}9025$

Wurzel ziehen: $|1-p| \geq \sqrt{0{,}9025} \quad \Leftrightarrow \quad |1-p| \geq 0{,}95$

Betragsungleichung auflösen:

$(*) \quad 1 - p \geq 0{,}95 \Rightarrow p \leq 0{,}05$ und

$(**) \quad -(1-p) \geq 0{,}95 \Rightarrow 1 - p \leq -0{,}95 \Rightarrow p \geq 1{,}95$ nicht definiert

AP 01/SI

Bei einer umfangreichen Verkehrszählung in einer Großstadt wurden Zusammenhänge zwischen der Anzahl der vorbeifahrenden PKWs bzw. LKWs und dem Geschlecht der am Steuer sitzenden Person gemacht. Es wird nun eine Reihe von zehn hintereinander fahrenden Fahrzeugen betrachtet.
Berechnen Sie, welchen Wert die Wahrscheinlichkeit p=P(L) haben müsste, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 mindestens eines der zehn Fahrzeuge ein LKW wäre.

Geg.: n = 10; P(„Fahrzeug ist LKW“) = p=0,99

Lösung:

$P(k \geq 1) \leq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(k = 0) \leq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad P(k = 0) = 0{,}01$

$P(k = 0) = \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot q^{10} = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad q = \pm\sqrt[10]{0{,}01} \quad p = 1 - \sqrt[10]{0{,}01} = 0{,}369$

AP 02/SI

In einer Druckerei werden Briefmarken gedruckt. Bei den nachfolgenden Untersuchungen kann aufgrund der großen Stückzahlen davon ausgegangen werden, dass die Anzahl der fehlerhaften Briefmarken einer Druckreihe binomialverteilt ist. Bei einer Druckreihe von 90 000 Sondermarken wird eine Standardabweichung von $\sigma = 90$ festgestellt.
Berechnen Sie, für welche Werte der Wahrscheinlichkeit p eine zufällig herausgegriffene Marke fehlerhaft ist. Welcher dieser Werte trifft zu, wenn insgesamt mehr fehlerfreie als fehlerhafte Briefmarken gedruckt werden.

Geg.: n = 90 000; $\sigma = 90$

Lösung: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q \quad \Leftrightarrow \quad 90^2 = 90000 \cdot p \cdot (1-p) \quad \Leftrightarrow \quad 8100 = 90000 \cdot (p - p^2)$

$\Leftrightarrow \quad 100\,p^2 - 100\,p + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1/2} = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 100 \cdot 9}}{2 \cdot 100} = \frac{100 \pm 80}{200}$

$p_1 = 0{,}1; p_2 = 0{,}9$ keine Lösung, da mehr fehlerfreie als fehlerhafte.