Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2000

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

Teilaufgabe 1 (7 BE)
Aus einem gut gemischten Kartenspiel mit 32 Karten erhält ein Spieler 5 Karten. Als Treffer gelten die drei Karten Pik As, Herz As und Karo As. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer in der Hand des Spielers an.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in Tabellenform auf vier Nachkommastellen genau, und berechnen Sie den Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße X.

Urnenmodell ohne Zurücklegen: Hypergeometrische Verteilung

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Gesamtzahl: N
Anzahl eines bestimmten Merkmals: K mit $K \le N$
Stichprobe: n

$N := 32 \qquad n := 5 \qquad K := 3$

Mathcad:

$$P(k) := \frac{\text{combin}(K, k) \cdot \text{combin}(N - K, n - k)}{\text{combin}(N, n)}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{29}{5}}{\binom{32}{5}} \qquad P(0) = 0.58972$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{29}{4}}{\binom{32}{5}} \qquad P(1) = 0.35383$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{29}{3}}{\binom{32}{5}} \qquad P(2) = 0.05444$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{29}{2}}{\binom{32}{5}} \qquad P(3) = 0.002016$$

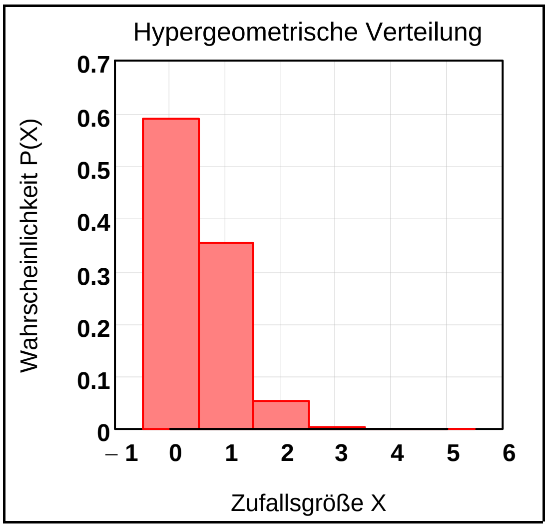
Gegeben: $N = 32$ $n = 5$ $K = 3$

Zufallsgrößen: $k := 0, 1 .. n$

Mit Schlüsselwort in Mathcad: $H(k) := \mathrm{dhypergeom}(k, K, N - K, n)$

$F(k) := \mathrm{phypergeom}(k, K, N - K, n)$

Definitionen



$k =$	$H(k) =$	$F(k) =$
0	0.58972	0.58972
1	0.35383	0.94355
2	0.05444	0.99798
3	0.00202	1
4	0	1
5	0	1

Erwartungswert:

$\mu := 0 \cdot 0.58972 + 1 \cdot 0.35383 + 2 \cdot 0.05444 + 3 \cdot 0.00202 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0$ $\mu = 0.4688$

Varianz:

$Var := 0^2 \cdot 0.58972 + 1^2 \cdot 0.35383 + 2^2 \cdot 0.05444 + 3^2 \cdot 0.00202 + 4^2 \cdot 0 + 5^2 \cdot 0 - \mu^2$ $Var = 0.3700$

Standardabweichung:

$\sigma := \sqrt{Var}$ $\sigma = 0.6083$

Teilaufgabe 2.0
Ein Händler kauft eine große Anzahl von Energiesparlampen. Der Produzent teilt mit, dass die Wahrscheinlichkeit für eine defekte Lampe 3 % beträgt. Die Lampen werden nacheinander mit Zurücklegen geprüft.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
Der Händler prüft 5 Lampen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
A: *Genau eine geprüfte Lampe ist defekt.*
B: *Höchstens eine geprüfte Lampe ist defekt.*
C: *Nur die erste geprüfte Lampe ist defekt.*
D: *Zwei aufeinanderfolgend geprüfte Lampen sind defekt, die anderen drei funktionieren.*

Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$.

Urnenmodell mit Zurücklegen: Binomialverteilung

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad n := 5 \qquad p := 0.03$$

$$P(A) = P(k = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0.03^1 \cdot 0.97^4 \qquad P(k) := \text{combin}(n, k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$P(1) = 0.13279 \qquad P(0) = 0.85873$$

$$P(B) = P(k \le 1) = P(k = 0) + P(k = 1) = 0.85873 + 0.13279 = 0.99152$$

$$P(C) = 1 \cdot 0.03^1 \cdot 0.97^4 = 0.02656$$

$$d, d, x, x, x \qquad x, d, d, x, x \qquad x, x, d, d, x \qquad x, x, x, d, d$$

4 Möglichkeiten $\qquad P(D) = 4 \cdot 0.03^2 \cdot 0.93^3 = 0.00329$

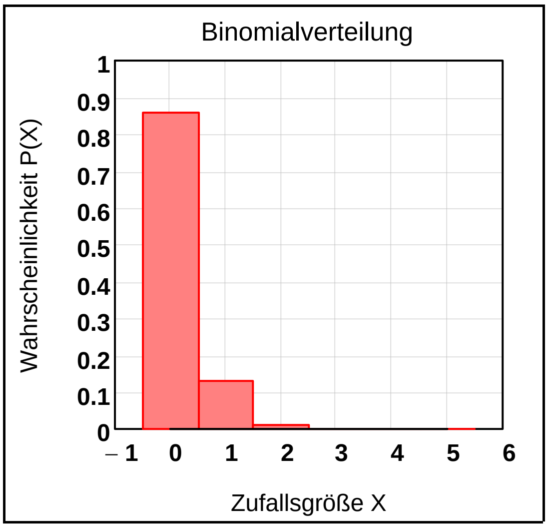
Bedingte Wahrscheinlichkeit : $\quad P(E_4) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{0.13279}{0.99152} = 0.13393$

Zufallsgrößen: $\mathbf{k} := \mathbf{0}, \mathbf{1} .. \mathbf{n}$

Mit Schlüsselwort in Mathcad: $\mathbf{B}(\mathbf{k}) := \mathbf{dbinom}(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{p})$

$\mathbf{F}(\mathbf{k}) := \mathbf{pbinom}(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{p})$

Definitionen



k =	B(k) =	F(k) =
0	0.8587	0.859
1	0.1328	0.992
2	0.0082	1
3	0.0003	1
4	0	1
5	0	1

Teilaufgabe 2.2 **(4 BE)**
Berechnen Sie, wie viele Lampen mindestens getestet werden müssen, um mit über 95% Wahrscheinlichkeit mindestens eine defekte Lampe zu finden.

$$P(X \geq 1) > 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) > 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) < 0.05$$

$$\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^n < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 0.97^n < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0.97) < \ln(0.05)$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.97)} \qquad n := \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.97)} \qquad n = 98.352$$

aufrunden: $n := \mathrm{ceil}(n) = 99$

Es müssen mindestens 99 Lampen geprüft werden.

Teilaufgabe 2.3.0
Händler und Produzent haben einen Preisnachlass vereinbart, falls in einer Stichprobe von 40 zufällig ausgewählten Lampen mehr als zwei defekt sind.

Teilaufgabe 2.3.1 (3 BE)
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Preisnachlass gewährt wird, obwohl die Lieferung nur 3 % defekte Lampen enthält.

X: Anzahl der defekten Lampen unter $n := 40$ getesteten Lampen, $p := 0.03$. nicht im TW

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$

$$= 1 - \left[\binom{40}{0} \cdot 0.03^0 \cdot 0.97^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0.03^1 \cdot 0.97^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0.03^2 \cdot 0.97^{38}\right]$$

$$= 1 - (0.29571 + 0.36583 + 0.22063) = 0.11783$$

Mathcad-Lösung: $F(k) := \text{pbinom}(k, n, p)$

$P_A := 1 - F(2)$ $\qquad P_A = 0.11783$

Der Preisnachlass wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 11,78% gewährt.

Teilaufgabe 2.3.2 (3 BE)
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Händler keinen Nachlass erhält, obwohl 6 % der Lampen dieser Lieferung defekt sind.

$n := 40 \qquad p := 0.06$

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \binom{40}{0} \cdot 0.06^0 \cdot 0.94^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0.06^1 \cdot 0.94^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0.06^2 \cdot 0.94^{38}$$

$$= 0.08416 + 0.21488 + 0.26746 = 0.5665$$

Falls 6% aller Lampen defekt sind, erhält der Händler mit einer Wahrscheinlichkeit von 56,65% keinen Preisnachlass.

Mathcad-Lösung: $F(k) := \text{pbinom}(k, n, p)$

$P_B := F(2)$ $\qquad P_B = 0.5665$

Teilaufgabe 2.4.0
Der Händler hat den Verdacht, dass einige Teillieferungen 10 % defekte Lampen enthalten, und möchte eine derartige Lieferung besser von den Lieferungen mit 3 % unterscheiden. Deshalb will er künftig eine Stichprobe von 100 Lampen ziehen. Er möchte mit mindestens 88 % Sicherheit eine solche Lieferung mit 10 % defekten Lampen erkennen.

Teilaufgabe 2.4.1 (4 BE)
Ermitteln Sie, ab wie viel defekten Lampen er sich für eine Defektwahrscheinlichkeit von 10 % entscheiden soll.

X: Anzahl der defekten Lampen unter $n := 100$ getesteten Lampen.

Hypothese 1: $p_1 := 0.1$

Annahmebereich : $A_1 = \{ k+1, k+2, \ldots, 100 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A_1} = \{ 0, 1, \ldots, k \}$

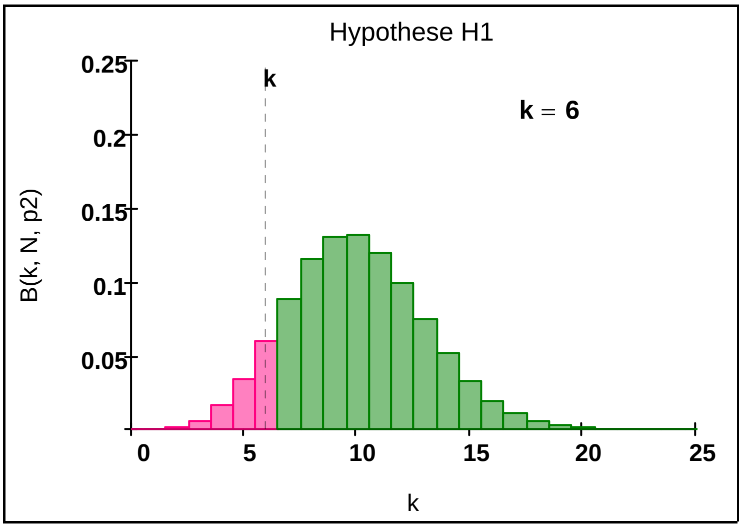
Linksseitiger Test:

$P(X > k) \geq 0.88 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq k) \geq 0.88 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \leq 0.12$

TW Seite 13: $0.11716 \qquad k = 6$

$\Rightarrow \qquad A = \{ 7, 8, \ldots, 100 \}$

Ab 7 defekten Lampen soll sich der Händler für eine Defektwahrscheinlichkeit vo 10% entscheiden.



Wahrscheinlichkeit von H_2 im Annahmebereich:

$P_1 = 0.883$

Hypothese H_1 wird nicht abgelehnt. obwohl sie falsch ist.

$\beta = 0.117 \qquad \beta = 11.7 \cdot \%$

Teilaufgabe 2.4.2 (3 BE)
Ermitteln Sie das Risiko, dass eine normale Lieferung (3 % defekt) vom Händler beanstandet wird, wenn man sich ab 7 defekten Lampen für eine Defektwahrscheinlichkeit von 10 % entscheidet, und beurteilen Sie kurz die neue Prüfregelung des Händlers im Vergleich zur Regel aus Aufgabe 2.3.

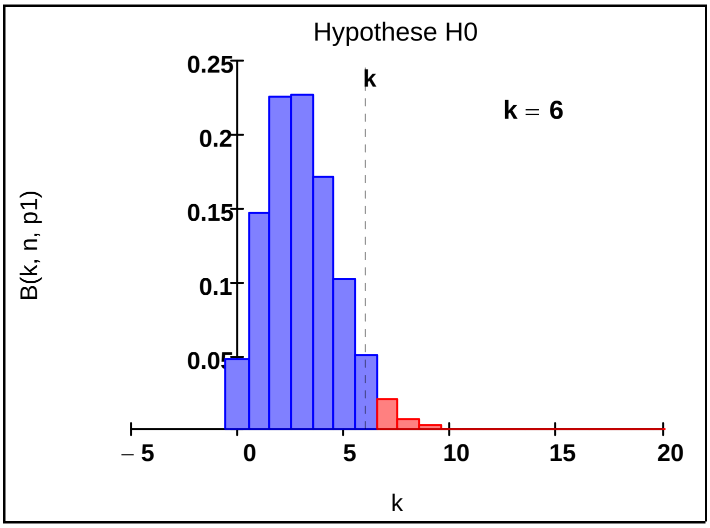
Hypothese 0: $p_0 := 0.03$

Annahmebereich: $A_0 = \{0, 1, \ldots, 6\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A_0} = \{7, 8, \ldots, 100\}$

TW Seite 10 $\beta = P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 0.96877 = 0.03123$

Die neue Prüfregel mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 3,12% ist für den Produzenten günstiger als die in Aufgabe 2.3.1, da dort die Wahrscheinlichkeit, dass eine normale Lieferung beanstandet wird mit 11,78% sehr hoch ist.



Wahrscheinlichkeit von H_1 im Annahmebereich:

$P_0 = 0.96877$

Richtige Hypothese H_1 wird abgelehnt.

$\alpha = 0.03123$

$\alpha = 3.12 \cdot \%$

Teilaufgabe 3 (5 BE)
Die Kreiswehrersatzämter eines Bereichs mustern pro Quartal 40 000 junge Männer. Erfahrungsgemäß äußern 40 % die Absicht, Zivildienst leisten zu wollen.
Ermitteln Sie mithilfe der Normalverteilung ein möglichst kleines Intervall, in dem mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Zivildienstleistenden liegt.

$n := 40000 \qquad p := 0.4 \qquad \mu := n \cdot p \qquad \mu = 16000 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \qquad \sigma = 97.98$

$$P(|X-\mu| \le c) = P(\mu - c \le X \le \mu + c) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right) - 1$$

Umgebungsformel: $2 \cdot \Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right) - 1 \ge 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right) \ge 0.95$

TW: $\frac{c+0.5}{\sigma} \ge 1.645 \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, c \\ \text{annehmen}, c > 0 \end{array} \rightarrow 160.67642507513311886 \le c < \infty$

aufrunden: $c := 161$

untere Grenze: $\mu - c = 15839$

obere Grenze: $\mu + c = 16161$

Probe: $\Phi(k) := \text{pnorm}(k, \mu, \sigma)$

$\Phi(\mu + c + 0.5) - \Phi(\mu - c - 1 + 0.5) = 0.901$