Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2001

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist eine Schar der reellen Funktionen g_k mit $k \in IR^+$ und der Definitionsmenge $D_{g_k} = IR$

durch $g_k(x) = \left(k - e^{2 \cdot x}\right)^2$.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Berechnen Sie in Abhängigkeit von k die Nullstelle von g_k und begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass diese Nullstelle gleichzeitig Extremstelle von g_k ist, und geben Sie die Art der Extremstelle an.

$$g_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k - e^{2 \cdot x} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{\ln(k)}{2}$$

zweifache Nullstelle ist eine Extremstelle: $x_0(k) := \frac{\ln(k)}{2}$ falls $k > 0$

$g_k(x) \geq 0$ für alle $x \in IR$, der Extrempunkt ist also ein Tiefpunkt.

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)

Ermitteln Sie das Verhalten von $g_k(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und geben Sie die Gleichung der Asymptote an. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S_k zwischen dem Graph der Funktion g_k und der Asymptote in Abhängigkeit von k.

[Teilergebnis: $x_S = \ln\left(\sqrt{2 \cdot k}\right)$]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(k - e^{2 \cdot x}\right)^2 \text{ annehmen}, k > 0 \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(k - e^{2 \cdot x}\right)^2 \text{ annehmen}, k > 0 \rightarrow k^2$$

waagrechte Asymptote $f(x, k) := k^2$

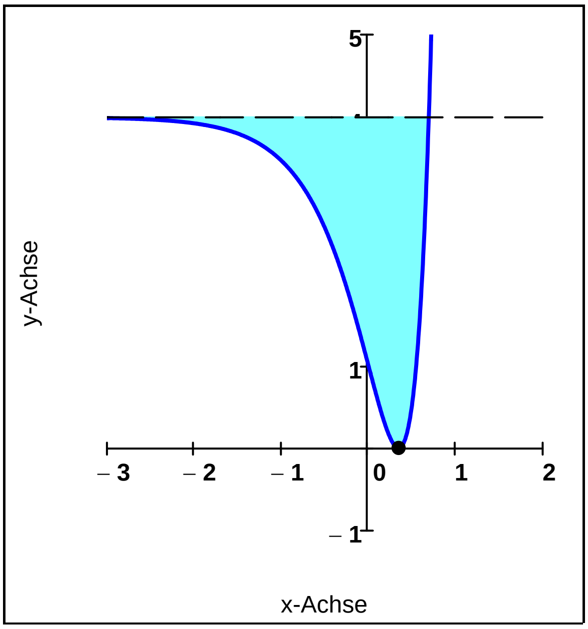
$$g_k(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left(k - e^{2 \cdot x}\right)^2 = k^2 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 2 \cdot k \cdot e^{2 \cdot x} + e^{4 \cdot x} = k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 \cdot k \cdot e^{2 \cdot x} + e^{4 \cdot x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2 \cdot x} \cdot \left(-2 \cdot k + e^{2 \cdot x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_S(k) := -2 \cdot k + e^{2 \cdot x} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{\ln(2 \cdot k)}{2} \qquad f\left(\frac{\ln(2 \cdot k)}{2}, k\right) \rightarrow k^2$$

Schnittpunkt: $S(k^2 / k^2)$

Teilaufgabe 1.3 **(8 BE)**
Veranschaulichen Sie den Verlauf des Graphen von g_k und seiner Asymptote anhand einer Skizze, und zeigen Sie durch Rechnung, dass der Inhalt der Fläche, die der Graph von g_k und die Asymptote begrenzen, endlich ist, und geben Sie die Flächenmaßzahl in Abhängigkeit von k an.



$$A(k) := \lim_{a \to -\infty} \int_a^{\ln\left(\sqrt{2 \cdot k}\right)} \left[k^2 - \left(k - e^{2 \cdot x}\right)^2\right] dx$$

Stammfunktion:

$$\int \left[k^2 - \left(k - e^{2 \cdot x}\right)^2\right] dx = \int \left(2 \cdot k \cdot e^{2 \cdot x} - e^{4 \cdot x}\right) dx = 2 \cdot k \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot x} - \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} + C$$

Grenzen einsetzen:

$$k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\sqrt{2 \cdot k}\right)} - \frac{1}{4} e^{4 \cdot \ln\left(\sqrt{2 \cdot k}\right)} - 2 \cdot k \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot a} + \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot a} = k \cdot 2 \cdot k - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot k^2 - k \cdot e^{2 \cdot a} + \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot a}$$

$$\lim_{a \to -\infty} \left(2 \cdot k^2 - k^2 - \underbrace{k \cdot e^{2 \cdot a}}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot a}}_{\downarrow \atop 0}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A(k) = k^2}$$

Teilaufgabe 2.0
gegebenn ist die Schar der Funktionen f_a mit der in IR maximalen Definitionsmenge $\mathbf{D_{f_a}}$ durch

$$f_a(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot a \cdot x}}{x + a}\right) \text{ mit } a \in \mathbb{R}^+ .$$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Zeigen Sie durch Rechnung, dass gilt: $\mathbf{D_{f_a} = \mathbb{R}_0^+}$.

$$-1 \le \frac{\sqrt{4 \cdot a \cdot x}}{x + a} \le 1$$

Es gilt: $4 \cdot a \cdot x \ge 0 \wedge x \ge 0$

Linke Seite $\quad -(x + a) \le \sqrt{4 \cdot a + x}$ $\quad$ erfüllt für alle $x \ge 0$

Rechte Seite: $\quad \sqrt{4 \cdot a \cdot x} \le x + a \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot a \cdot x \le (x + a)^2$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \cdot a \cdot x \le x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x^2 - 2 \cdot a \cdot x + a^2$$

$\Leftrightarrow \quad 0 \le (x - a)^2$ $\quad$ erfüllt für alle $x \ge 0$

$$\Leftrightarrow \quad D_{f_a} = [\, 0 \,;\, \infty \,[$$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Geben Sie die Nullstelle von f_a an und untersuchen Sie das Verhalten von $\mathbf{f_a(x)}$ für $x \to \infty$.

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot a \cdot x}}{x + a}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4 \cdot a \cdot x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 0$$

L. Hosp.

$$\lim_{x \to \infty} \arcsin\left(\frac{\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{\sqrt{4 \cdot a \cdot x}}}}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{x + a}}}\right) = \lim_{x \to \infty} \arcsin\left(\frac{\frac{4 \cdot a}{2 \cdot \sqrt{4 \cdot a \cdot x}}}{1}\right) = \lim_{x \to \infty} \arcsin\left(\frac{4 \cdot a}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{2 \cdot \sqrt{4 \cdot a \cdot x}}}}\right) = 0$$

Teilaufgabe 2.3 (7 BE)

Zeigen Sie, dass für $x < a$ gilt. $f'_a(x) = \dfrac{a}{(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}}$ und geben Sie $f'_a(x)$ für $x > a$ an.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{4\cdot a\cdot x}}{x+a}\right)^2}}\cdot\frac{\dfrac{4\cdot a}{2\cdot\sqrt{4\cdot a\cdot x}}\cdot(x+a)-\sqrt{4\cdot a\cdot x}\cdot 1}{(x+a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4\cdot a\cdot x}{(x+a)^2}}}\cdot\frac{\dfrac{2\cdot a\cdot(x+a)-4\cdot a\cdot x}{\sqrt{4\cdot a\cdot x}}}{(x+a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2-4\cdot a\cdot x}}\cdot\frac{2\cdot a^2-2\cdot a\cdot x}{(x+a)\cdot\sqrt{4\cdot a\cdot x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2}}\cdot\frac{a^2-a\cdot x}{(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}} = \frac{-a\cdot(x-a)}{|x-a|\cdot(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}}$$

1. Fall: $0 < x < a \quad\Leftrightarrow\quad x-a<0 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x) = \dfrac{-a\cdot(x-a)}{-(x-a)\cdot(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}} = \dfrac{a}{(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}}$

2. Fall: $x > a \quad\Leftrightarrow\quad x-a>0 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x) = \dfrac{-a\cdot(x-a)}{(x-a)\cdot(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}} = \dfrac{-a}{(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}}$

Teilaufgabe 2.4 (7 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten von $f'_a(x)$ für $x \to 0$ und $x \to a$ und das Monotonieverhalten des Graphen von f_a, und geben Sie die Koordinaten und Art der Extrempunkte des Graphen von f_a an.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{a}{(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}} \text{ annehmen}, a>0 \ \to \infty$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{a}{(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}} \text{ annehmen}, a>0 \ \to \frac{1}{2\cdot a}$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{-a}{(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}} \text{ annehmen}, a>0 \ \to -\frac{1}{2\cdot a}$$

Sei $0 < x < a$: $f'(x) = \dfrac{a}{(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}} > 0$

G_{f_a} ist streng monoton steigend in $x \in [\,0\,;\,a]$

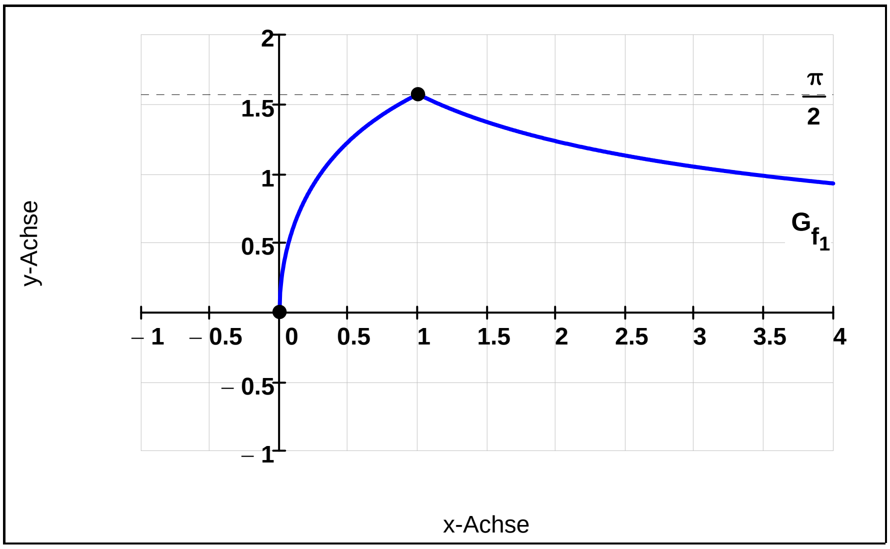
Sei $x > a$: $f'(x) = \dfrac{-a}{(x+a)\cdot\sqrt{a\cdot x}} < 0$

G_{f_a} ist streng monoton fallend in $x \in [\,a\,;\,\infty[$

$f(0,a) = 0$ $f(a,a)$ **annehmen**, $a > 0 \rightarrow \dfrac{\pi}{2}$

G_{f_a} besitzt auf der Nahtstelle $x = a$ einen Hochpunkt **H(0 / $\frac{\pi}{2}$)** und auf dem linken Rand einen Tiefpunkt **T(0/0)**.

Teilaufgabe 2.5 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen von f_1, unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem für $0 \le x \le 4$ (1 LE = 2 cm).



Teilaufgabe 2.6 **(9 BE)**
Der Graph von f_1, die durch $x = 1$ gegebene Gerade und die x-Achse begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
Hinweis: Beginnen Sie mit partieller Integration und verwenden Sie dann die Substitution $z = \sqrt{x}$.

Flächeninhalt: $A := \int_0^1 \arcsin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot x}}{x+1}\right) dx$

Bestimmung der Stammfunktion:

$$\int \arcsin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot x}}{x+1}\right) dx$$

$$u(x) := \arcsin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot x}}{x+1}\right) \qquad u'(x) := \frac{d}{dx}u(x) \;\left|\begin{array}{l}\text{annehmen}, 0 < x < 1 \\ \text{vereinfachen}\end{array}\right. \rightarrow -\frac{x-1}{\sqrt{x} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{(x-1)^2}}$$

Betrag auflösen: $u'(x) = \frac{-(x-1)}{\sqrt{x} \cdot (x+1) \cdot |x-1|} = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x+1)}$

$$v'(x) := 1 \qquad v(x) := x$$

$$\int \arcsin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot x}}{x+1}\right) dx = x \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot x}}{x+1}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x} \cdot (x+1)} dx$$

Substitution: $z(x) := \sqrt{x} \qquad z'(x) := \frac{d}{dx}z(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \qquad dz \cdot 2 \cdot z = dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x} \cdot (x+1)} dx = \int \frac{z^2 \cdot 2 \cdot z}{z \cdot \left(z^2+1\right)} dz = 2 \cdot \int \frac{z^2}{z^2+1} dz$$

Polynomdivision: $z := z \qquad \left(\frac{z^2}{z^2+1}\right) \text{parfrac} \rightarrow 1 - \frac{1}{z^2+1}$

$$\int 1 - \frac{1}{z^2+1} dz \rightarrow z - \operatorname{atan}(z)$$

$$2 \cdot \int \frac{z^2}{z^2+1} \, dz = 2 \cdot \int 1 - \frac{1}{z^2+1} \, dz = 2 \cdot z - 2 \operatorname{atan}(z)$$

$$F(x) := x \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot x}}{x+1}\right) - 2 \cdot \sqrt{x} + 2 \operatorname{atan}(\sqrt{x})$$

$F(1) = \pi - 2$ $\quad F(0) = 0$ $\quad A := F(1) - F(0)$ $\quad A = \pi - 2$

Teilaufgabe 3 (6 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + y \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = e^{\cos(x)} \quad \text{für } x \in \,]\, 0 \,;\, \pi \,[$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.

Inhomogene DGL: $\quad y' + y \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = e^{\cos(x)}$

Homogene DGL: $\quad y' + y \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -y \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Triviale Lösung: $\quad y = 0$

Verwendung Differentialquotient: $\quad \frac{dy}{dx} = -y \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad y \neq 0$

Trennen der Variablen: $\quad \frac{dy}{y} = -y \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot dx$

Integration:

$$\int \frac{1}{y} \, dy = -\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \, dx + k \rightarrow \ln(|y|) = k - \ln(|\sin(x)|)$$

Mit $0 < x < \pi$: $\sin(x) > 0$ $\quad \ln(|y|) = k - \ln(\sin(x))$

Delogarithmieren: $\quad |y| = e^{k - \ln(\sin(x))} = e^k \cdot \frac{1}{\sin(x)}$

$y > 0 \qquad y = K \cdot \frac{1}{\sin(x)} \qquad K > 0$

$y < 0 \qquad y = -K \cdot \frac{1}{\sin(x)} \qquad K > 0$

Zusammenfassung mit trivialer Lösung: $y_h(x) = K \cdot \frac{1}{\sin(x)}$

Variation der Konstanten: $y_p(x) = K(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)}$

$$y'_p(x) = K'(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} + K(x) \cdot \frac{-\cos(x)}{(\sin(x))^2}$$

Einsetzen in DGL:

$$K'(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} + K(x) \cdot \frac{-\cos(x)}{(\sin(x))^2} + K(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = e^{\cos(x)}$$

$$K'(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} = e^{\cos(x)}$$

$$K'(x) = \sin(x) \cdot e^{\cos(x)}$$

$$K(x) = \int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)}\, dx \quad \Rightarrow \quad K(x) = -e^{\cos(x)}$$

Spezielle Lösung: $y_p(x) = -e^{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\sin(x)}$

Allgemeine Lösung der inhomgenen DGL:

$$y_A(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot \frac{1}{\sin(x)} - e^{\cos(x)}$$