Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2003

- **Mathematik 13 Technik - A II - Aufgabentext**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen f_a mit $a \in \mathbb{R}^+$ und der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$

durch $f_a(x) = \dfrac{4}{1 + e^{a \cdot x}}$.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten der Graphen von f_a an.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Graphen aller Funktionen f_a symmetrisch zum Punkt P(0/2) sind.

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen f_a und zeichnen Sie für den Sonderfall $a = 1$ den Graphen der Funktion f_1 in ein kartesisches Koordinatensystem für $-5 \le x \le 5$.
Verwenden Sie für die Zeichnung ein gesondertes Blatt. (1 LE = 1 cm)

Teilaufgabe 1.4 (11 BE)

Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung der Schar der Funktionen $F_a(x) = \displaystyle\int_0^x f_a(t)\,dt$

mit $x \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie dann die Flächenmaßzahl $A(a)$ der Fläche, die von den Koordinatenachsen und dem Graphen von f_a im ersten Quadranten umschlossen wird und sich ins Unendliche erstreckt. Beginnen Sie mit einer geeigneten Substitution.

[Teilergebnis: $F_a(x) = \dfrac{4}{a} \cdot \ln\left(\dfrac{2 \cdot e^{a \cdot x}}{1 + e^{a \cdot x}}\right)$]

Teilaufgabe 1.5 (9 BE)

Weisen Sie für $a = 1$ nach, dass der Graph von F_1 für $x \rightarrow -\infty$ eine Asymptote mit der Gleichung $y = 4 \cdot (x + \ln(2))$ besitzt und skizzieren Sie den Graphen von F_1 mit seinen beiden Asymptoten für $-2 \le x \le 5$ im Koordinatensystem der Aufgabe 1.3.

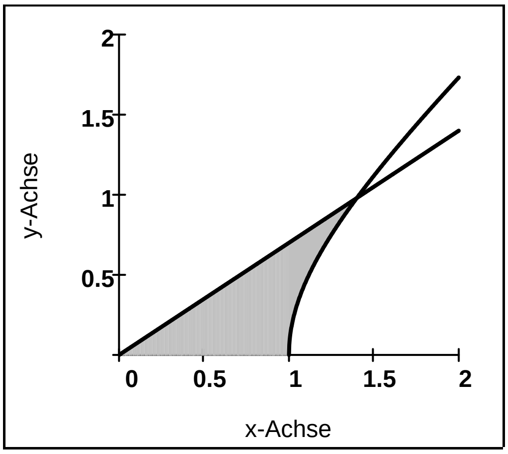
Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Die Tangente an den Graphen der Funktion F_1 im Punkt $R(0/\,F_1(0))$ schneidet die beiden Asymptoten des Graphen von F_1 in den Punkten P und Q.
Berechnen Sie die Kooordinaten von P und Q und geben Sie an, in welchem Verhältnis der Punkt R die Strecke [PQ] teilt.

Teilaufgabe 2.0

Von der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ soll nur der Anteil im ersten Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems betrachtet werden (siehe Skizze).
Dieser lässt sich als Graph der Funktion

$h(x) := \sqrt{x^2 - 1}$ mit $x \geq 1 \wedge x \in IR$ beschreiben.



Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
Eine Ursprungsgerade schneidet den Graphen von h im Punkt $S_b(b, h(b))$ mit $b \geq 0$ (siehe Skizze). Lässt man die grau gefärbte Fläche um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper mit der Volumenmaßzahl $V(b)$.
Berechnen Sie b so, dass die Volumenmaßzahl $V(b)$ gleich der Volumenmaßzahl einer Kugel mit Radius 1 LE ist.

Teilaufgabe 2.2 (10 BE)
Es ist m mit $0 < m < 1$ die Steigung der Ursprungsgeraden aus Aufgabe 2.1 und

$H(x) = \frac{1}{2} \cdot (x \cdot h(x) - \ln(x + h(x)))$ mit $x \geq 1$ ist eine Stammfunktion von h.

Zeigen Sie, das für die Maßzahl der in der Skizze grau gefärbten Fläche in Abhängigkeit von m gilt:

$B(m) = \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{1 + m}{1 - m}\right)$

und berechne Sie m so, dass gilt: $B(m) = 0.25$

Teilaufgabe 3 (10 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$y' + 2 \cdot y \cdot \tan(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ für $x \in \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$ mit der Methode der Variation der Konstanten.