Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2003

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Eine Kfz-Werkstatt für Autoelektronik baut in Fahrzeuge Alarmanlagen ein. Die Werkstatt verfügt über 11 Stellplätze, 4 davon befinden sich in der Werkstatthalle. Fahrzeuge, in die bereits eine Alarmanlage eingebaut wurde, werden im Hof abgestellt, Fahrzeuge ohne Alarmanlage stehen in der Werkstatthalle. Am Abend eines Arbeitstages befinden sich in der Werkstatt 8 PKW, 5 davon bereits mit eingebauter Alarmanlage.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Stellplätze zu belegen, wenn die Anordnung der Fahrzeuge untereinander mit berücksichtigt wird.

Es gibt $11 - 4 = 7$ Plätze auf dem Hof.

Anzahl der Möglichkeiten auf dem Hof, 5 mit eingebauter Alarmanlage: $N_1 := 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

Anzahl der Möglichkeiten in der Werkstatthalle, 3 ohne eingebaute Alarmanlage: $N_2 := 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Anzahl der Möglichkeiten: $N := N_1 \cdot N_2 = 60480$

oder:

$N_1 = \binom{7}{5} \cdot 5!$ $\quad N_1 := \text{combin}(7, 5) \cdot 5! = 2520$ $\quad N_2 := \binom{4}{3} \cdot 3!$ $\quad N_2 := \text{combin}(4, 3) \cdot 3! = 24$

ohne Zurücklegen, ohne Wiederholung, mit Reihenfolge

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)
Im Keller der Werkstatt werden die defekten Alarmanlagen bis zum Rücktransport zum Hersteller gesammelt. In einem Container liegen bereits völlig ungeordnet 70 defekte Anlagen vom Typ A und 50 vom Typ B. Ein Angstellter nimmt wahllos 15 Anlagen heraus, um sie zu verpacken.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
E: *Es sind genau 9 Anlagen vom Typ A darunter,*
F: *Alle entnommenen Anlagen sind vom Typ A*,
G: *Es sind mindestens 2 Anlagen vom Typ B darunter*.

Urnenmodell ohne Zurücklegen: Hypergeometrische Verteilung

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Gesamtzahl: N
Anzahl eines bestimmten Merkmals: K mit $K \le N$
Stichprobe: n

$$P(E) = P(X = 9) = \frac{\binom{70}{9}\cdot\binom{50}{6}}{\binom{120}{15}}$$

$$P_E := \frac{\text{combin}(70,9)\cdot\text{combin}(50,6)}{\text{combin}(120,15)} = 0.218 \qquad P_E = 21.8\cdot\%$$

$$P(F) = P(X = 15) = \frac{\binom{70}{15}\cdot\binom{50}{0}}{\binom{120}{15}}$$

$$P_F := \frac{\text{combin}(70,15)\cdot\text{combin}(50,0)}{\text{combin}(120,15)} = 0.00015 \qquad P_F = 0.015\cdot\%$$

$$P(G) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left[\frac{\binom{70}{15}\cdot\binom{50}{0}}{\binom{120}{15}} + \frac{\binom{70}{14}\cdot\binom{50}{1}}{\binom{120}{15}}\right]$$

$$P_G := 1 - \left(\frac{\text{combin}(70,15)\cdot\text{combin}(50,0)}{\text{combin}(120,15)} + \frac{\text{combin}(70,14)\cdot\text{combin}(50,1)}{\text{combin}(120,15)}\right) = 0.9978$$

$$P_G = 99.78\cdot\%$$

Teilaufgabe 2.0
Ein Spielautomat liefert nach dem Zufallsprinzip voneinander unabhängig eine der drei Zahlen -2, 0 und 2. Die Zahl -2 taucht mit der Wahrscheinlichkeit 0.5, die Zahl 2 mit der Wahrscheinlichkeit 0.4 und folglich die Zahl 0 mit der Wahrscheinlichkeit 0.1 auf. Bei einem Spiel werden auf Knopfdruck drei der obigen Zahlen vom Automaten nacheinander ausgewählt und ihre Summe angezeigt.

Teilaufgabe 2.1 (8 BE)
Die Zufallsgröße X beschreibt die vom Automaten nach einem Spiel angezeigte Summe. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Werte der Zufallsgröße X eintreten, lassen sich mit den Parametern **a, b** und **c** $\in$ **IR** wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} \text{"x"} & -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ \text{"P(X=x)"} & 0.125 & 0.075 & c & a & 0.252 & b & 0.064 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Parameter a, b und c und stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten in einem Histogramm dar (vertikale Achse: $0.1\ \text{LE} = 2\ \text{cm}$).
[Teilergebnis: $a = 0.121$; $b = 0.048$;]

Summe 0: $(0,0,0)$ $(-2,0,2)$ $(-2,2,0)$ $(2,-2,0)$ $(2,0,-2)$ $(0,-2,2)$ $(0,2,-2)$

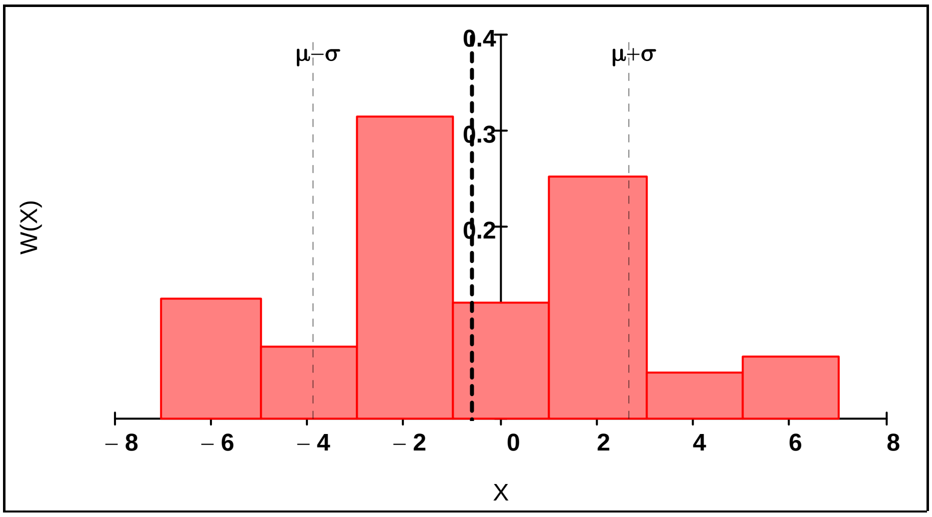
$$a = P(X = 0) = 1 \cdot 0.1^3 + 6 \cdot 0.5 \cdot 0.1 \cdot 0.4 = 0.121$$

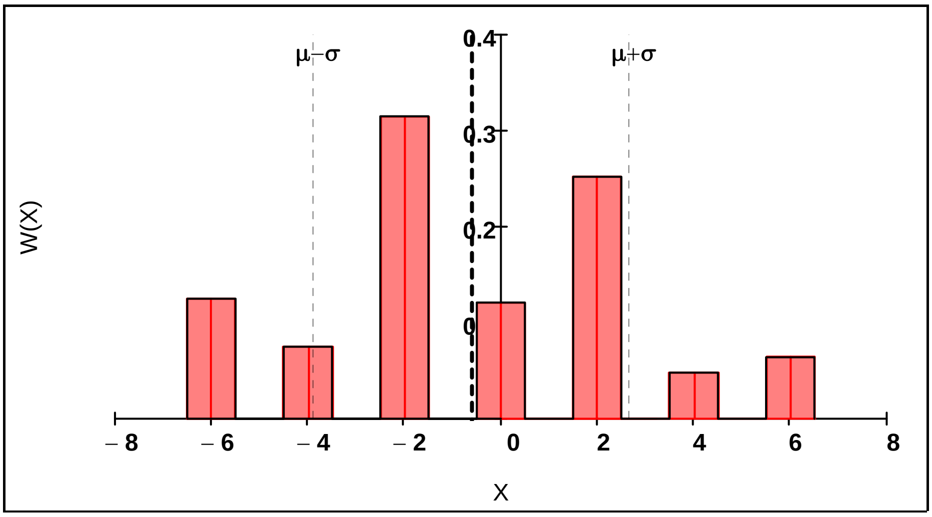
Summe 4: $(2,2,0)$ $(2,0,2)$ $(0,2,2)$

$$b = P(X = 4) = 3 \cdot 0.4^2 \cdot 0.1 = 0.048$$

Summe -2: $(-2,0,0)$ $(0,-2,0)$ $(0,0,-2)$ $(2,-2,-2)$ $(-2,2,-2)$ $(-2,-2,2)$

$$c = P(X = -2) = 3 \cdot 0.5 \cdot 0.1^2 + 3 \cdot 0.4 \cdot 0.5^2 = 0.315$$





Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Ermitteln Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ und die Standardabweichung $\sigma(\mathbf{X})$ und kennzeichnen Sie Ihre Ergebnisse in der graphischen Darstellung aus Teilaufgabe 2.1.

$\mu := (-6)\cdot 0.125 + (-4)\cdot 0.075 + (-2)\cdot 0.315 + 0\cdot 0.121 + 2\cdot 0.252 + 4\cdot 0.048 + 6\cdot 0.064 \qquad \mu = -0.6$

$Var\_X := (-6)^2\cdot 0.125 + (-4)^2\cdot 0.075 + (-2)^2\cdot 0.315 + 0^2\cdot 0.121 + 2^2\cdot 0.252 + 4^2\cdot 0.048 + 6^2\cdot 0.064 - \mu^2$

$Var\_X = 10.68 \qquad \sigma := \sqrt{Var\_X} \qquad \sigma = 3.27$

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
A: *Bei drei Spielen erscheint an der Anzeige wenigstens einmal die **Summe 2**.*
B: *Bei fünf Spielen erscheint genau zweimal die **Summe > 0**.*

$n := 3 \qquad p_2 := 0.252 \qquad k := 0$

$P(A) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - B(3, 0.252, 0)$

$P_A := 1 - \text{pbinom}(k, n, p_2) \qquad P_A = 0.5815$

$n := 5 \qquad p_a := 0.121 \qquad k := 2$

$p_b = P(X > 0) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6)$

$p_b := 0.252 + 0.048 + 0.064 \qquad p_b = 0.364$

$P_B = \binom{5}{2}\cdot 0.364^2\cdot(1 - 0.364)^3 \qquad P_B := \text{combin}(5, 2)\cdot 0.364^2\cdot(1 - 0.364)^3 \qquad P_B = 0.341$

Teilaufgabe 2.4 (9 BE)
Es besteht der Verdacht, dass die ***Summe 0*** nicht auf die Nullhypothese $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) = 0.121$, sondern auf einen neuen Wert eingependelt hat. Die Überprüfung dieses Sachverhalts soll in 800 Durchgängen erfolgen. Beschreiben Sie einen geeigneten Hypothesentest bei einem Signifikanzniveau von 5% und bestimmen Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

Testgröße X: Anzahl der Summe 0 unter $n := 800$ Durchgängen

Nullhypothese: $p_0 := 0.121$

Gegenhypothese: $p_1 \neq 0.121$

Zweiseitiger Test:

Annahmebereich : $A_1 = \{ k_1 + 1, k_1 + 2, ..., k_2 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A_1} = \{ 0, 1, ..., k_1 \} \cup \{ k_2 + 1, k_2 + 2, ..., 800 \}$

Signifikanzniveau: $\alpha := 0.05$

$P(\overline{A}) \le \frac{\alpha}{2}$ $\quad$ $P(X = k) \le \frac{\alpha}{2}$

$\mu := n \cdot p_0 = 96.8$ $\quad$ $\sigma := \sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)}$ $\quad$ $\sigma = 9.224$

$\frac{\alpha}{2} = 0.025$ $\quad$ $\Phi\left(\frac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \le 0.0025 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma} \le -1.960$

$k_1 := -1.960 \cdot \sigma + \mu - 0.5$ $\quad$ $k_1 = 78.22$ $\quad$ abrunden: $\quad$ $k_1 := 78$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ $\quad$ $\Phi\left(\frac{k_2 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.975 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k_2 - \mu + 0.5}{\sigma} \ge 1.960$

$k_2 := 1.969 \cdot \sigma + \mu - 0.5$ $\quad$ $k_2 = 114.463$ $\quad$ aufrunden: $\quad$ $k_2 := 115$

$\overline{A} = \{ 0, 1, \ldots, 78 \} \cup \{ 116, 117, \ldots, 800 \}$

Teilaufgabe 2.5 (4 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn die ***Summe 0*** tatsächlich mit der Wahrscheinlichkeit von **0.15** auftritt.

$\beta = P(A) = P(79 \le X \le 115) = P(X = 115) - P(X = 78)$

$p_1 := 0.15$ $\quad$ $\mu_1 := n \cdot p_1 = 120$ $\quad$ $\sigma_1 := \sqrt{n \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)} = 10.1$

$$\beta = \Phi\left(\frac{115 - \mu_1 + 0.5}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{78 - \mu_1 + 0.5}{\sigma_1}\right) = \Phi(-0.466) - \Phi(-4.109)$$

$\frac{115 - \mu_1 + 0.5}{\sigma_1} = -0.446$ $\quad$ $\frac{78 - \mu_1 + 0.5}{\sigma_1} = -4.109$

$$\beta = 1 - \Phi(0.466) - (1 - \Phi(4.109)) = \Phi(4.109) - \Phi(0.466)$$

$\mathrm{knorm}(4.109) = 0.99998$

$\mathrm{knorm}(0.466) = 0.67939$

$\beta := \mathrm{knorm}(4.109) - \mathrm{knorm}(0.466) = 0.321$ $\quad$ $\beta = 32.1 \cdot \%$