Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2003

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Im dichten Berufsverkehr wartet die Polizei hinter einer unübersichtlichen Rechtskurve auf Autofahrer, die während der Fahrt mit dem Handy in der Hand telefonieren. Man geht davon aus, dass die Fahrer unabhängig voneinander mit der Wahrescheinlichkeit p telefonieren.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den nächsten 10 vorbeifahrenden Autos
a) nur der zweite und achte Fahrer auf verbotene Weise telefoniert.
b) zwar zwei der Fahrer ertappt werden, aber keiner unter den ersten fünf.

Bernoulli, jedoch nur eine Kombination: $P_a = 1 \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$

Die Fahrer 1 bis 5 telefonieren nicht: $P_1 = (1-p)^5$

Die Fahrer 6 bis 10 telefonieren, über Bernoulli: $P_2 = \binom{5}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^3$

$$P_b = (1-p)^5 \cdot \binom{5}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^3$$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Die Polizei will mit über 90% Wahrscheinlichkeit in den nächsten 10 vorbeifahrenden Autos mindestens einen ordnungswidrig telefonierenden Fahrzeuglenker anhalten. Berechnen Sie, wie hoch dazu der Anteil p mindestens sein müsste.

$$P(X \ge 1) > 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X=0) > 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad P(X=0) < 0.1$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} < 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad (1-p)^{10} < 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - p < \sqrt[10]{0.1}$$

$$\Leftrightarrow \quad p > 1 - \sqrt[10]{0.1} \qquad p_0 := 1 - \sqrt[10]{0.1} \text{ Gleitkommazahl}, 5 \rightarrow 0.20567$$

Der Anteil müsste mindestens $p_0 = 20.6 \cdot \%$ betragen.

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)

Nun werden 200 Fahrzeuge überprüft. Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ ist, dass ein Autofahrer mit dem Gerät in der Hand telefoniert. X sei nun die Anzahl der überführten Fahrer. Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Bereich, symmetrisch um den Erwartungswert von X, in dem die Anzahl der ertappten Autofahrer mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit liegt.

$n := 200 \qquad p := \frac{1}{8} \qquad \mu := n \cdot p = 25 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4.677$

$P(|X - \mu| \le c) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(\mu - c \le X \le \mu + c) \ge 0.95$

$\Leftrightarrow \quad F(\mu + c) - F(\mu - c - 1) \ge 0.95$

Näherung mithilfe der Normalverteilung, Umgebungsformel:

$$\Phi\left(\frac{\mu + c - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - c - 1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) - 1 \qquad \frac{1.95}{2} = 0.975$$

$$2 \cdot \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) - 1 \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.975$$

Tafelwerk: $\quad \text{qnorm}(0.975, 0, 1) = 1.95996 \qquad \frac{c + 0.5}{\sigma} \ge 1.96$

$c \ge 1.96 \cdot \sigma - 0.5 \rightarrow c \ge 8.66706059759615692$

aufrunden: $\quad c_0 := 9$

Gesuchter Bereich: $\quad \mu - c_0 \le X \le \mu + c_0 \rightarrow 16 \le X \le 34$

Teilaufgabe 1.4.0
Durch das Beobachten von 1000 Autos will die Polizeidirektion die Nullhypothese *Höchstens 12,5% der Autofahrer telefonieren unerlaubt* überprüfen.

Teilaufgabe 1.4.1 (8 BE)
Ermitteln Sie in einem Signifikanztest einen möglichst großen Ablehnungsbereich auf dem Signifikanzniveau von 5%.

Testgröße: Anzahl der telefonierenden Autofahrer unter $n := 1000$ Autofahrern $p := 0.125$

Nullhypothese: $p_0 \le 0.125$

Gegenhypothese: $p_1 > 0.121$

Rechtsseitiger Test:

Annahmebereich : $A = \{ 0, 1, ..., k \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ k+1, k+2, ..., 1000 \}$

Signifikanzniveau: $\alpha := 0.05$

$P(\overline{A}) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \ge k+1) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le k) \le 0.05 \qquad P(X \le k) \ge 0.95$

$\mu := n \cdot p = 125 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 10.458$ > 3, Näherung durch Normalverteilung

$\Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.95 \qquad \text{qnorm}(0.95, 0, 1) = 1.645$

$\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \ge 1.645 \qquad k \ge 1.645 \cdot \sigma + \mu - 0.5 \rightarrow k \ge 141.70382179560692952$

aufrunden: $k := 142$

Maximaler Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 143, 144, ..., 1000 \}$

Teilaufgabe 1.4.2 (4 BE)
Bestimmen Sie das Risiko, dass die Nullhypothese nicht abgelehnt wird, obwohl p in Wahrheit bei 15 % liegt, wenn die Nullhypothese bei bis zu 142 telefonierenden Autofahrer angenommen wird.

$\mu_1 := n \cdot 0.15 = 150 \qquad \sigma_1 := \sqrt{n \cdot 0.15 \cdot (1 - 0.15)} = 11.292 \qquad \frac{142 - \mu_1 + 0.5}{\sigma_1} = -0.664$

$\beta = P(A) = P(X \le 142) = \Phi\left(\frac{142 - \mu_1 + 0.5}{\sigma_1}\right) = \Phi(-0.664) = 1 - \Phi(0.664)$

$\text{knorm}(0.664) = 0.747 \qquad \beta := 1 - \text{knorm}(0.664) = 0.253 \qquad \beta = 25.335 \cdot \%$

Teilaufgabe 2 (7 BE)
In einem Nationalpark lebt eine (unbekannte) Anzahl $\mathbf{N \geq 190}$ einer vom Aussterben bedrohten Tierart. Es werden $\mathbf{M = 100}$ Tiere eingefangen, markiert und wieder frei gelassen. Einige Zeit später, nachdem sich die Tiere *gut* durchmischt haben, fängt man genau $\mathbf{n = 10}$ dieser Tiere und zählt die Anzahl X der markierten unter ihnen. Die Zufallsgröße X ist zwar nicht binomialverteilt, kann aber mit sehr guter Näherung mit $\mathbf{B\left(n, \frac{M}{N}\right)}$ als binomialverteilt betrachtet werden. Berechnen Sie mit der Binomialverteilung $\mathbf{B\left(n, \frac{M}{N}\right)}$ als Näherung diejenige Zahl N, bei der die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: *Unter den 10 gefangenen Tieren sind genau 5 markierte Tiere* maximal wird.

$$n := 10 \qquad k := 5 \qquad p = \frac{M}{N} = \frac{100}{N}$$

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$B(N) = B\left(10, \frac{100}{N}, 5\right) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{100}{N}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{100}{N}\right)^5 \qquad \text{combin}(10, 5) = 252$$

$$B(N) = 252 \cdot \left(\frac{100}{N} - \frac{100^2}{N^2}\right)^5 = 252 \cdot 100^5 \cdot \left(\frac{N - 100}{N^2}\right)^5 = 2.52 \cdot 10^{12} \cdot \left(\frac{N - 100}{N^2}\right)^5$$

$$B'(N) = 2.52 \cdot 10^{12} \cdot 5 \cdot \left(\frac{N - 100}{N^2}\right)^4 \cdot \frac{1 \cdot N^2 - (N - 100) \cdot 2 \cdot N}{N^4}$$

$$B'(N) = 12.6 \cdot 10^{12} \cdot \left(\frac{N - 100}{N^2}\right)^4 \cdot \frac{(N - 2 \cdot N + 200)}{N^3}$$

$$B'(N) = 12.6 \cdot 10^{12} \cdot \left(\frac{N - 100}{N^2}\right)^4 \cdot \frac{(-N + 200)}{N^3}$$

$$B'(N) = 0 \qquad (N - 100) \cdot (-N + 200) = 0 \text{ auflösen}, N \rightarrow \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{keine Lösung} \\ \text{Lösung} \end{matrix}$$

Vorzeichen von B ':

$$190 \leq N \leq 200 \quad \Rightarrow \quad B'(N) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad B(200) \text{ ist Maximum}$$

$$N \geq 200 \quad \Rightarrow \quad B'(N) \leq 0$$