Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1997

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

Aufgabe

Eine umfangreiche Nussmischung enthält 15% Walnüsse. Die Nüsse dieser Mischung werden durch eine Abfüllanlage in Tüten zu je 50 Stück abgepackt.

Teilaufgabe 1 (7 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse

A: *Eine Tüte enthält mindestens 10 Walnüsse.*

B: *Eine Tüte enthält mindestens 8 und höchstens 13 Walnüsse.*

Untersuchen Sie außerdem, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

$\mathbf{n := 50} \qquad \mathbf{p := 0.15}$

$$\mathbf{P(A) = P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0.79109 = 0.20891}$$

$$\mathbf{P(B) = P(8 \leq X \leq 13) = P(X \leq 13) - P(X \leq 7) = 0.98683 - 0.51875}$$

$\mathbf{P\_A := 0.20891} \qquad \mathbf{P\_B := 0.46808} \qquad \mathbf{P\_A \cdot P\_B = 0.098}$

$$\mathbf{P(10 \leq X \leq 13) = P(X \leq 13) - P(X \leq 9) = 0.98683 - 0.79109 = 0.19574}$$

$\Rightarrow$ A und B sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 2 (6 BE)

Ein Kunde kauft 10 Tüten der Nussmischung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

C: *In jeder Tüte sind entweder 7 oder 8 Walnüsse enthalten.*

D: *In den 10 Tüten sind insgesamt 70 Walnüsse enthalten.*

in einer Tüte:

$$\mathbf{P(X = 7 \vee X = 8) = 0.15745 + 0.14935 = 0.30680}$$

in 10 Tüten: $\mathbf{P(C) = P(X = 7 \vee X = 8)^{10} = 0.30680^{10} = 0.00000739}$

$$\mathbf{P(D) = P(X = 70)^{10}}$$

Näherung über Normalverteilung:

10 Tüten: $\mathbf{n := 500} \qquad \mathbf{\mu := n \cdot p = 75} \qquad \mathbf{\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 7.984}$

$$\mathbf{P(D) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{70 - 75}{\sigma}\right) = \frac{1}{7.984} \cdot \varphi(-0.625) = \frac{1}{7.984} \cdot \varphi(0.625) = \frac{1}{7.984} \cdot 0.32713 = 0.04097}$$

Teilaufgabe 3 (6 BE)
Ein Supermarkt erhält eine Lieferung von 500 Tüten Nussmischung.
Ermitteln Sie das kleinste Intervall symmetrisch zum Erwartungswert, in dem mit mindestens 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Walnüsse in der gesamten Lieferung liegt.

500 Tüten a 50 Nüssen: $\mathbf{n := 500 \cdot 50 = 25000}$

$\mu := \mathbf{n \cdot p = 3750}$ $\qquad \sigma := \sqrt{\mathbf{n \cdot p \cdot (1 - p)}} = \mathbf{56.458}$

$$\mathbf{P(|X - \mu| \le c) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) - 1 \ge 0.9} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.95}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{\frac{c + 0.5}{\sigma} \ge 1.645} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c := 1.645 \cdot \sigma - 0.5 = 92.373}$$

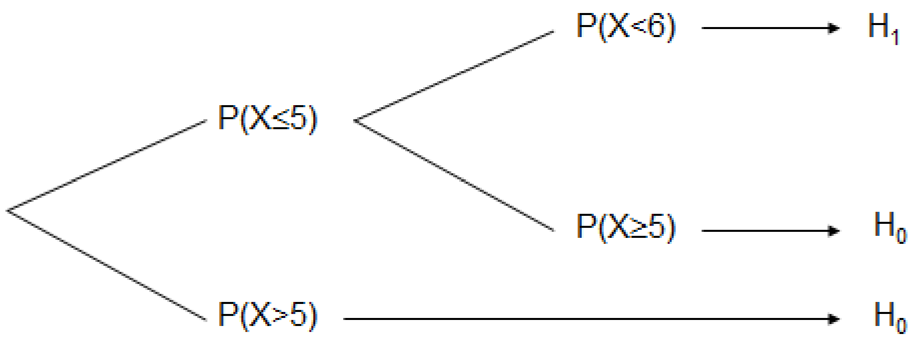
aufrunden: $\mathbf{c := ceil(c)}$ $\qquad \mathbf{c = 93}$

untere Grenze: $\mu - \mathbf{c = 3657}$

obere Grenze: $\mu + \mathbf{c = 3843}$

Teilaufgabe 4.0
Von Zeit zu Zeit wird überprüft, ob sich der Anteil der Walnüsse in der Nussmischung signifikant verringert hat.

Teilaufgabe 4.1 (4 BE)
Zunächst wird die Anzahl der Walnüsse in einer zufällig ausgewählten Tüte bestimmt. Enthält diese Tüte höchstens 5 Walnüsse, wird eine weitere Tüte zufällig der Abfüllanlage entnommen. Nur wenn diese zweite Tüte weniger als 6 Walnüsse enthält, wird die Nullhypothese verworfen.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und bestimmen Sie damit das Signifiknazniveau des Tests.



Mit den Pfadregeln folgt: $\mathbf{P(\overline{A}) = P(X \le 5) \cdot P(x < 6) = P(X \le 5) \cdot P(X \le 5) = P(X \le 5)^2}$

$\mathbf{n := 50}$ $\qquad \mathbf{p := 0.15}$ $\qquad \mathbf{P(\overline{A}) = 0.21935^2 = 0.04811}$

Teilaufgabe 4.2 (7 BE)
In einem anderen Testverfahren wird die Nullhypothese H_0: $p := 0.15$ auf dem Signifikanzniveau von 5% überprüft. Hierzu werden der Reihe nach aus dem großen Abfüllbehälter so viele Nüsse zufällig entnommen, bis sich in dieser Probe 20 Walnüsse befinden. Bestimmen Sie, ab welchem Umfang dieser Stichprobe die Nullhypothese abgelehnt werden kann.

$p := 0.15$ n ist nicht bekannt.

Nullhypothese H_0: $p \geq 0.15$ Gegenhypothese H_0: $p < 0.15$

Linksseitiger Test: $\overline{A} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, k\}$ $A = \{k+1, k+2, \ldots, n\}$

$$P(X \leq 20) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{20 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20 - \mu + 0.5}{\sigma} \leq -1.645$$

$\mu = n \cdot 0.15$ $\sigma := \sqrt{n \cdot 0.15 \cdot 0.85}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{20 - 0.15 \cdot n + 0.5}{\sqrt{0.15 \cdot 0.85} \cdot \sqrt{n}} \leq -1.645$$

$$\Leftrightarrow \quad 20 - 0.15 \cdot n + 0.5 \leq -1.645 \cdot \sqrt{0.15 \cdot 0.85} \cdot \sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 20 - 0.15 \cdot n + 0.5 + 1.645 \cdot \sqrt{0.15 \cdot 0.85} \cdot \sqrt{n} \leq 0$$

Substitution: $\sqrt{n} = z$

$-0.15 \cdot z^2 + 1.645 \cdot \sqrt{0.15 \cdot 0.85} \cdot \sqrt{n} + 20.5 \leq 0$ $1.645 \cdot \sqrt{0.15 \cdot 0.85} = 0.58738$

Nebenrechnung:

$$-0.15 \cdot z^2 + 1.645 \cdot \sqrt{0.15 \cdot 0.85} \cdot z + 20.5 = 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -9.9 \\ 13.8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{keine Lösung} \\ \text{Lösung} \end{array}$$

$z \geq 13.8$ $z_0 := 13.8$ $n := z_0^2$ $n = 190.44$ aufrunden: $\text{ceil}(n) = 191$

Erst bei mindestens 191 Nüssen in der Stichprobe kann H_0 auf dem 5%-Niveau abgelehnt werden.