Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2000
Mathematik 13 Technik - A II - Lösung

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k mit der in IR maximalen Definitionsmenge D_k durch

$$f_k(x) = \arcsin\left(\frac{k - x^2}{x^2}\right) \text{ mit } k \in \mathbb{R}^+.$$

Teilaufgabe 1.1 **(8 BE)**
Bestimmen Sie D_k, das Symmetrieverhalten des Graphen von f_k und das Verhalten von $f_k(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge.

Bedingung: $-1 \le \frac{k - x^2}{x^2} \le 1$

Linke Seite: $-1 \le \frac{k - x^2}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 \le k - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le k$ immer erfüllt für $k > 0$.

Rechte Seite: $\frac{k - x^2}{x^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad k - x^2 \le x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \ge \frac{k}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |x| \ge \sqrt{\frac{k}{2}}$

$$x \le -\sqrt{\frac{k}{2}} \vee x \ge \sqrt{\frac{k}{2}}$$

Definitionsmenge: $D_k = \left]-\infty ; -\sqrt{\frac{k}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k}{2}} ; \infty\right[$

$$f_k(-x) = \arcsin\left[\frac{k - (-x)^2}{(-x)^2}\right] = \arcsin\left(\frac{k - x^2}{x^2}\right) = f_k(x) \quad \Rightarrow \quad \text{Achsensymmetrie zur y-Achse}$$

Verhalten an den Rändern:

$$f_k\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{k - \frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \qquad f_k\left(-\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{k - x^2}{x^2} \to -1 \qquad \lim_{x \to \infty} \arcsin\left(\underbrace{\frac{k - x^2}{x^2}}_{\downarrow \; -1}\right) \to -\frac{\pi}{2}$$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Geben Sie die maximalen Intervalle an, in denen der Graph von f_k streng monton steigend bzw. streng monoton fallend verläuft.
[Teilergebnis: $f'_k(x) = \frac{-2 \cdot k}{x \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot x^2 - k^2}}$]

Ableitungsfunktion:

$$f'_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k - x^2}{x^2}\right)^2}} \cdot \frac{x^2 \cdot (-2 \cdot x) - \left(k - x^2\right) \cdot 2 \cdot x}{x^4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4 - \left(k - x^2\right)^2}{x^4}}} \cdot \frac{-2 \cdot x^3 - 2 \cdot k \cdot x + 2 \cdot x^3}{x^4}$$

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{x^4 - \left(k - x^2\right)^2}} \cdot \frac{-(2 \cdot k \cdot x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^4 - k^2 + 2 \cdot k \cdot x^2 - x^4}} \cdot \frac{-(2 \cdot k)}{x} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot x^2}} \cdot \frac{-(2 \cdot k)}{x}$$

$f'_k(x) > 0$ für $x < 0$ $\Rightarrow$ G_f ist streng monoton steigend in $\left] -\infty ; -\sqrt{\frac{k}{2}} \right]$

$f'_k(x) < 0$ für $x > 0$ $\Rightarrow$ G_f ist streng monoton fallend in $\left[\sqrt{\frac{k}{2}} ; \infty \right[$

Teilaufgabe 2.0
Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \begin{cases} f_8(x) & \text{if } |x| \geq 2 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot \sqrt{4 - x^2}}{x + 4} & \text{if } |x| < 2 \end{cases}$$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion h.

Für $x \leq -2 \vee x \geq 2$ gilt: $f_8(x) := \arcsin\left(\frac{8 - x^2}{x^2}\right)$

Nullstellen: $\arcsin\left(\frac{8 - x^2}{x^2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8 - x^2}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - x^2 = 0$

$x_1 = -2 \cdot \sqrt{2}$ $\qquad$ $x_2 = 2 \cdot \sqrt{2}$

Für $-2 < x < 2$ gilt: $h_2(x) := \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot \sqrt{4 - x^2}}{x + 4}$

Nullstellen: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot \sqrt{4 - x^2}}{x + 4} = 0$

$\pi \cdot (x + 4) - 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{4 - x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 4) = 2 \cdot \sqrt{4 - x^2}$

Quadrieren: $x^2 + 8 \cdot x + 16 = 16 - 4 \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot x^2 + 8 \cdot x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x \cdot (5 \cdot x + 8) = 0 \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = \frac{-8}{5}$

Probe: $h_2(0) = 0 \qquad h_2\left(\frac{-8}{5}\right) = 0$ also beides Lösung

Teilaufgabe 2.2 **(6 BE)**
Untersuchen Sie, ob die Funktion h an der Stelle $x = 2$ stetig und differenzierbar ist.

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot \overset{\overset{0}{\uparrow}}{\sqrt{4 - x^2}}}{x + 4} \right) \to \frac{\pi}{2}$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 2^+} \left(\arcsin\left(\frac{\overset{\overset{4}{\uparrow}}{8 - x^2}}{\underset{\underset{4}{\downarrow}}{x^2}} \right) \right) \to \frac{\pi}{2}$

Funktionswert: $f_8(2) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ G_h ist stetig an der Stelle $x = 2$

$$h'_2(x) = -\pi \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{(-2\cdot x)\cdot(x+4)}{2} - \sqrt{4-x^2}\cdot 1}{(x+4)^2} = -\pi \cdot \frac{-x^2 - 4\cdot x - \left(4-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}\cdot(x+4)^2}$$

$$\ldots = -\pi \cdot \frac{-4\cdot x - 4}{\sqrt{4-x^2}\cdot(x+4)^2} = \pi \cdot \frac{4\cdot(x+1)}{\sqrt{4-x^2}\cdot(x+4)^2}$$

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to 2^-} \left[\pi \cdot \frac{\overset{\overset{12}{\uparrow}}{4\cdot(x+1)}}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\sqrt{4-x^2}} \cdot \underset{\underset{36}{\downarrow}}{(x+4)^2}}\right] \to \infty$$

Grenzwert existiert nicht, also ist G_h nicht differenzierbar an $x = 2$.

Teilaufgabe 2.3 **(8 BE)**
Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von h ohne Verwendung der 2. Ableitung für $x > -2$.

$$h'(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + 2\cdot k\cdot x^2}} \cdot \frac{-16}{x}\right) & \text{if } x < -2 \lor x > 2 \\ \left[\pi \cdot \frac{4\cdot(x+1)}{\sqrt{4-x^2}\cdot(x+4)^2}\right] & \text{if } -2 < x < 2 \end{cases}$$

Vorzeichentabelle für h '(x):

Waagrechte Tangenten: $h'_2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \text{ auflösen}, x \;\to -1$

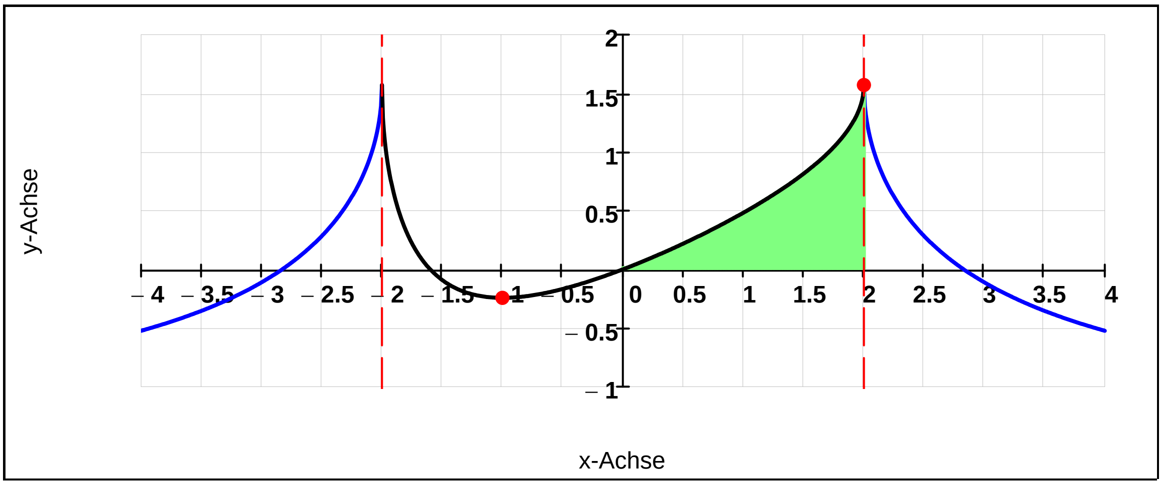
		$x \neq -2$		$x = -1$		$x \neq 2$	
$h'(x)$	neg		neg		pos		neg
G_h	smf		smf		sms		smf
				TP		Nahtstelle	

Der Graph von h besitzt an der Stelle **x = –1** einen Tiefpunkt und auf der Nahtstelle **x = 2** einen Hochpunkt.

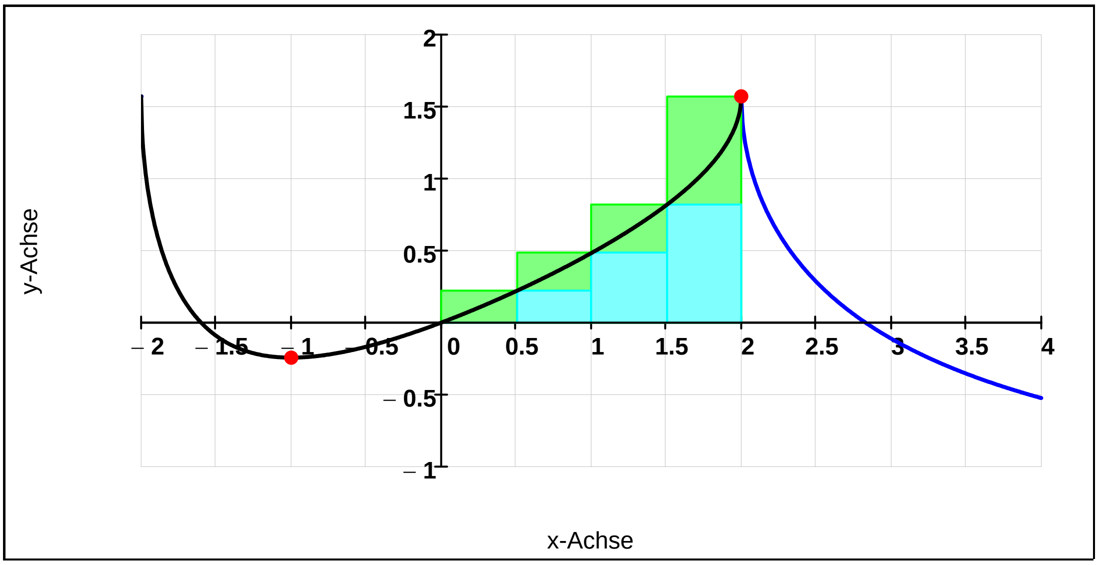
$$h(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot \sqrt{4 - (-1)^2}}{-1 + 4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad TP\left(-1 \,/\, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} \right)$$

$$h(2) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad HP\left(2 \,/\, \frac{\pi}{2} \right)$$

Teilaufgabe 2.4 **(5 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen von h unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-2 \le x \le 4$ (1 LE = 2 cm).



Teilaufgabe 2.5 (5 BE)
Der Graph von h für $|x| < 2$, die positive x-Achse und die Gerade $x = 2$ begrenzen im ersten Quadranten eine endliche Fläche A, deren Flächenmaßzahl durch eine Näherung (2 Stellen Genauigkeit) abzuschätzen ist. Bilden Sie dazu die Ober- und Untersumme bei einer Rechtecksbreite von 0,50 LE.



Untersumme: $S_U := 0.5 \cdot (h_2(0) + h_2(0.5) + h_2(1) + h_2(1.5))$ $\quad S_U = 0.76$

Obersumme: $S_O := 0.5 \cdot (h_2(0.5) + h_2(1) + h_2(1.5) + h_2(2))$ $\quad S_O = 1.54$

Flächenabschätzung: $0.76 < A < 1.54$

Teilaufgabe 2.6 (6 BE)

Ermitteln Sie die Integralfunktion H mit $H(x) = \int_2^x h(t)\,dt$, $x \geq 2$ in integralfreier Darstellung.

[Teilergebnis: $\int h(x)\,dx = 4 \cdot \ln\left(\sqrt{x^2 - 4} + x\right) + x \cdot \arcsin\left(\frac{8 - x^2}{x^2}\right) + C$ mit $C \in IR$ für $|x| \geq 2$]

$$H(x) = \int_2^x \arcsin\left(\frac{8 - x^2}{x^2}\right) dx$$

$$\int \arcsin\left(\frac{8 - x^2}{x^2}\right) dx$$

Partielle Integration:

$$u(x) = \arcsin\left(\frac{8-x^2}{x^2}\right) \qquad u'(x) = \frac{1}{\sqrt{16\cdot x^2 - 64}}\cdot\frac{-16}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\cdot\frac{-4}{x}$$

$$v'(x) = 1 \qquad v(x) = x$$

$$\int \arcsin\left(\frac{8-x^2}{x^2}\right)dx = \arcsin\left(\frac{8-x^2}{x^2}\right)\cdot x - \int x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\cdot\frac{-4}{x}\right)dx$$

$$= \arcsin\left(\frac{8-x^2}{x^2}\right)\cdot x + 4\cdot\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$$

$$= \arcsin\left(\frac{8-x^2}{x^2}\right)\cdot x + 4\cdot\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|\right) + K$$

$$H(x) = \arcsin\left(\frac{8-x^2}{x^2}\right)\cdot x + 4\cdot\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|\right) - (\arcsin(1) + 4\cdot\ln(2)) + K$$

$$H(2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \arcsin(1)\cdot 2 + 4\cdot\ln(2) + K = 0 \text{ auflösen}, K \ \rightarrow -\pi - \ln(16)$$

$$H(x) := \arcsin\left(\frac{8-x^2}{x^2}\right)\cdot x + 4\cdot\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|\right) - \pi - \ln(16)$$

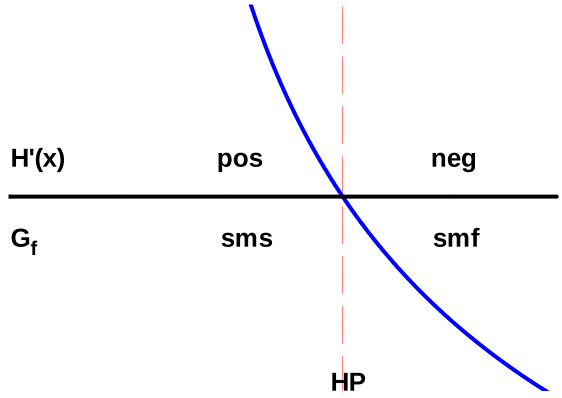
Teilaufgabe 2.7 (4 BE)
Bestimmen Sie vom Graphen der Funktion H die Koordinaten und die Art des Extrempunktes im Inneren der Definitionsmenge.

$$H'(x) = h(x) = f_8(x) = \arcsin\left(\frac{8-x^2}{x^2}\right)$$ Nullstelle von H`(x):

$$\arcsin\left(\frac{8-x^2}{x^2}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{8-x^2}{x^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 8 - x^2 = 0 \text{ auflösen}, x \ \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{2} \\ -2\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

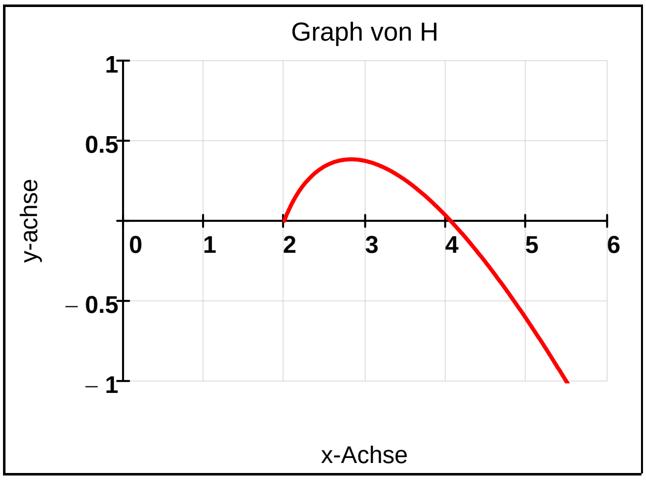
$$x_0 := 2\cdot\sqrt{2}$$

Vorzeichen von H'(x):



$$H\left(2\cdot\sqrt{2}\right) = 4\cdot\ln\left(2\cdot\sqrt{2}+2\right) - \ln(16) - \pi = 0.384$$

$$HP(\ 2\cdot\sqrt{2}\ /\ 4\cdot\ln\left(2\cdot\sqrt{2}+2\right) - \ln(16) - \pi\ )$$



Teilaufgabe 3 (8 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \frac{y}{x+1} = \frac{1}{x\cdot(x+2)} \quad \text{mit } x \in IR^+$$

mittels der Methode der Variation der Konstanten.

DGL: $y' + \frac{y}{x+1} = \frac{1}{x\cdot(x+2)}$

1. Lösung der homogenen DGL

$y' + \frac{y}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **tiviale Lösung:** $y(t) = 0$

Differentialquotient: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = 0$

Variable trennen: $\frac{dy}{y} = \frac{-1}{x+1}\cdot dx \quad$ mit $y \neq 0$

Integrieren: $\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{-1}{x+1}\,dx$

$\Leftrightarrow \quad \ln(|y|) = -\ln(|x+1|) + k \quad \Leftrightarrow \quad \ln(|y|) = -\ln(x+1) + k \quad$ da x > 0

Nach y auflösen:

$y > 0 \qquad y = e^{-\ln(x+1)+k} = e^k\cdot\frac{1}{x+1} = K\cdot\frac{1}{x+1}$

$y < 0 \qquad -y = e^{-\ln(x+1)+k} = e^k\cdot\frac{1}{x+1} = K\cdot\frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad y = -K\cdot\frac{1}{x+1}$

Mit der trivialen Lösung gilt: $y_H(x,K) := K\cdot\frac{1}{x+1} \quad$ mit $K \in IR$

2. Lösung der inhomogenen DGL

Variation der Konstanten: $y(x) = K(x)\cdot\frac{1}{x+1}$

Ableitung durch Anwendung der Produktregel: $y'(x) = K'(x)\cdot\frac{1}{x+1} + K(x)\cdot\frac{-1}{(x+1)^2}$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $y' + \frac{y}{x+1} = \frac{1}{x\cdot(x+2)}$

$$K'(x)\cdot\frac{1}{x+1} + K(x)\cdot\frac{-1}{(x+1)^2} + K(x)\cdot\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x\cdot(x+2)}$$

vereinfachen: $K'(x)\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x\cdot(x+2)}$

Auflösen: $K'(x) = \frac{x+1}{x\cdot(x+2)}$

$$K(x) = \int \frac{x+1}{x\cdot(x+2)}\,dx$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x+1}{x\cdot(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A\cdot(x+2) + B\cdot x}{x\cdot(x+2)} = \frac{(A+B)\cdot x + 2\cdot A}{x\cdot(x+2)}$$

Koeffizientenvergleich:

$A + B = 1$

$2\cdot A = 1$ $\quad A = \frac{1}{2}$ $\quad B = 1 - A = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$K(x) = \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\ln(|x|) + \frac{1}{2}\cdot\ln(|x+2|)$$

Da $x > 0$ gilt: $K(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln(x) + \frac{1}{2}\cdot\ln(x+2) = \frac{1}{2}\cdot\ln[x\cdot(x+2)]$

$$y_S(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln[x\cdot(x+2)]\cdot\frac{1}{x+1}$$

<u>3. Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL</u>

$$y_A(x,K) = y_H(x) + y_S(x) = K\cdot\frac{1}{x+1} + \left[\frac{1}{2}\cdot\ln[x\cdot(x+2)]\right]\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$y_A(x,K) := \frac{K}{x+1} + \frac{\ln(x^2 + 2\cdot x)}{2\cdot(x+1)}$$