

Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2002

• Mathematik 13 Technik - A II - Aufgabentext



Aufgabe 1.0

Gegeben ist eine Schar von reellen Funktionen f_k mit der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge D_k durch $f_k(x) = k + k \cdot \ln[(x - k) \cdot (x + 2)]$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 1.1 (8 BE)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die maximale Definitionsmenge und das Verhalten von $f_k(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge.
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_k an.

Aufgabe 1.2 (5 BE)

Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar genau 2 Nullstellen haben und berechnen Sie diese.

Aufgabe 1.3 (4 BE)

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von k das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion f_k .

[Zwischenergebnis: $f'_k(x) = \frac{k \cdot (2 \cdot x - k + 2)}{(x + 2) \cdot (x - k)}$]

Aufgabe 2.0

Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{if } |x| > 2 \\ -2 \cdot \arctan(x^2 - 4) & \text{if } |x| \leq 2 \end{cases}$$

wobei f_2 die Funktion f_k aus Aufgabe 1 mit $k = 2$ ist.

Aufgabe 2.1 (7 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion g achsensymmetrisch ist, geben Sie die Nullstellen von g an und begründen Sie ohne weitere Rechnung, ob g stetig in D_g ist.

Aufgabe 2.2 (4 BE)

Ermitteln Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Koordinaten und die Art eventueller Extrempunkte.

[Teilergebnis: $g'(x) = \frac{-4 \cdot x}{x^4 - 8 \cdot x^2 + 17}$ für $|x| < 2$]

Aufgabe 2.3 (6 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion g einschließlich seiner Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem für $|x| \leq 2.5$ (1 LE = 1 cm).

Aufgabe 2.4 (7 BE)

Begründen Sie, dass für die Funktion h mit $h(x) = f_2(x)$, $D_h =] 2 ; \infty [$ eine Umkehrfunktion

h^{-1} existiert. Bestimmen Sie deren Funktionsgleichung und geben Sie die maximale Definitionsmenge von h^{-1} an. Zeichnen Sie zusätzlich in das Koordinatensystem aus Aufgabe 2.3 den Graphen der Umkehrfunktion h^{-1} einschließlich seiner Asymptote ein.

Aufgabe 2.5 (8 BE)

Der Graph der Umkehrfunktion h^{-1} , die Gerade $y = 2$ und die Gerade $x = 0$ begrenzen im 2. Quadranten eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche. Zeigen Sie mithilfe der Funktion g , dass die Maßzahl dieser Fläche endlich ist, und berechnen Sie diese Maßzahl auf 4 Nachkommastellen genau.

Aufgabe 3 (9 BE)

Für einen Laborversuch wird eine Kupfersulfatlösung gebraucht, deren Konzentration $y(t)$ mit der Zeit t abnimmt. Dazu wird einem Behälter eine Kupfersulfatlösung mit einer bestimmten Konzentration und dem Volumen V bereitgestellt.

Während des Versuchs fließt eine weitere Kupfersulfatlösung mit konstanter Durchflussmenge Q und konstanter Konzentration k_0 in den Behälter. Gleichzeitig fließt die selbe Durchflussmenge Q bereits vermischter Kupfersulfatlösung aus dem Behälter ab. In dieser Versuchsphase gelte für die Konzentration $y(t)$ der Kupfersulfatlösung im Behälter die folgende Differentialgleichung:

$$y'(t) = \frac{Q}{V} \cdot k_0 - \frac{Q}{V} \cdot y(t) \text{ mit } Q, k_0 \text{ und } V \text{ konstant, } t \geq 0.$$

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante C , wenn sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Behälter eine Kupfersulfatlösung

mit der Konzentration $30 \cdot \frac{g}{l}$ befindet und $k_0 = 24 \cdot \frac{g}{l}$ ist.

$$\left[\text{Teilergebnis: } y(t) = C \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} + k_0 \right]$$