Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2002

- **Mathematik 13 Technik - A II - Lösung**

Aufgabe 1.0
Gegeben ist eine Schar von reellen Funktionen f_k mit der in IR maximalen Definitionsmenge D_k

durch $f_k(x) = k + k\cdot\ln[(x-k)\cdot(x+2)]$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

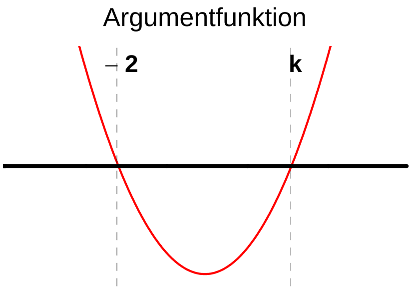
Aufgabe 1.1 **(8 BE)**
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die maximale Definitionsmenge und das Verhalten von $f_k(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge.
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_k an.

Argumentfunktion:

$Arg(x,k) := (x-k)\cdot(x+2)$ $\qquad k := 4$

Definitionsmenge:

$D_k = \,]-\infty\,;\,-2\,[\; \cup \;]\,k\,;\,\infty\,[$



$$\lim_{x \to -2^-} \left[k + k\cdot\ln[\overset{\overset{-2-k}{\uparrow}}{(x-k)}\cdot\overset{\overset{0^-}{\uparrow}}{(x+2)}]\right] \to -\infty$$

$$\lim_{x \to k^+} \left[k + k\cdot\ln[\overset{\overset{0^+}{\uparrow}}{(x-k)}\cdot\overset{\overset{k+2}{\uparrow}}{(x+2)}]\right] \to -\infty$$

$\Rightarrow$ senkrechte Asymptoten $x = -2$ und $x = k$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[k + k\cdot\ln[\overset{\overset{-\infty}{\uparrow}}{(x-k)}\cdot\overset{\overset{-\infty}{\uparrow}}{(x+2)}]\right] \to \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[k + k\cdot\ln\left[\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{(x-k)}}\cdot\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{(x+2)}}\right]\right] \rightarrow \infty$$

Aufgabe 1.2 (5 BE)
Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar genau 2 Nullstellen haben und berechnen Sie diese.

$$f_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k + k\cdot\ln[(x-k)\cdot(x+2)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln[(x-k)\cdot(x+2)] = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-k)\cdot(x+2) = e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + (2-k)\cdot x - 2\cdot k - e^{-1} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{e^{-1}+9}+1 \\ 1-\sqrt{e^{-1}+9} \end{pmatrix}$$

Diskriminante: $D(k) := k^2 + 4\cdot k + 4\cdot e^{-1} + 4 \qquad D(k) = (k+2)^2 + 4\cdot e^{-1}$

$D(k)$ immer positiv, also gibt es immer zwei Lösungen.

Aufgabe 1.3 (4 BE)
Untersuchen Sie in Abhängigkeit von k das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion f_k.

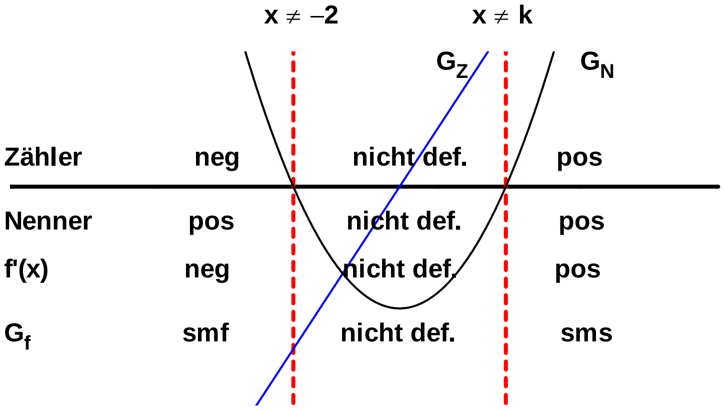
[Zwischenergebnis: $f'_k(x) = \dfrac{k\cdot(2\cdot x - k + 2)}{(x+2)\cdot(x-k)}$]

Funktionsterm: $f_k(x) = k + k\cdot\ln[(x-k)\cdot(x+2)] = k + k\cdot\ln\left(x^2 - k\cdot x + 2\cdot x - 2\cdot k\right)$

Ableitungsfunktion: $f'_k(x) = \dfrac{k}{(x+2)\cdot(x-k)}\cdot(2\cdot x - k + 2)$

$2\cdot x - k + 2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1 \qquad x = \dfrac{k-2}{2} \qquad \notin D_f$

$z(x,k) := 2\cdot x - k + 2 \qquad n(x,k) := (x+2)\cdot(x-k)$



Zähler	neg	nicht def.	pos
Nenner	pos	nicht def.	pos
f'(x)	neg	nicht def.	pos
G_f	smf	nicht def.	sms

Aufgabe 2.0

Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{if } |x| > 2 \\ -2 \cdot \arctan\left(x^2 - 4\right) & \text{if } |x| \leq 2 \end{cases}$$

wobei f_2 die Funktion f_k aus Aufgabe 1 mit $k = 2$ ist.

Aufgabe 2.1 (7 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion g achsensymmetrisch ist, geben Sie die Nullstellen von g an und begründen Sie ohne weitere Rechnung, ob g stetig in D_g ist.

$$f_2(x) := 2 + 2 \cdot \ln\left(x^2 - 4\right)$$

$f_2(-x) = 2 \cdot \ln\left(x^2 - 4\right) + 2$ $\qquad$ $f_2(-x) = f(x)$ $\qquad$ also achsensymmetrisch

$$g_2(x) := -2 \cdot \arctan\left(x^2 - 4\right)$$

$g_2(-x) = -2 \cdot \operatorname{atan}\left(x^2 - 4\right)$ $\qquad$ $g_2(-x) = g_2(x)$ $\qquad$ also achsensymmetrisch

Nullstellen:

$$f_2(x) = 0 \rightarrow 2 \cdot \ln\left(x^2 - 4\right) + 2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{e^{-1} + 4} \\ -\sqrt{e^{-1} + 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.09 \\ -2.09 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad |x| > 2$$

$$g_2(x) = 0 \rightarrow -2 \cdot \operatorname{atan}\left(x^2 - 4\right) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad |x| \leq 2$$

G nicht stetig in D, da $x = 2 \wedge x = -2$ Unendlichkeitstellen von f_2 sind.

Aufgabe 2.2 **(4 BE)**
Ermitteln Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Koordinaten und die Art eventueller Extrempunkte.

[Teilergebnis: $\mathbf{g'(x)} = \dfrac{-4\cdot x}{x^4 - 8\cdot x^2 + 17}$ für $|x| < 2$]

$$g_2(x) := -2\cdot\text{arctan}\left(x^2 - 4\right)$$

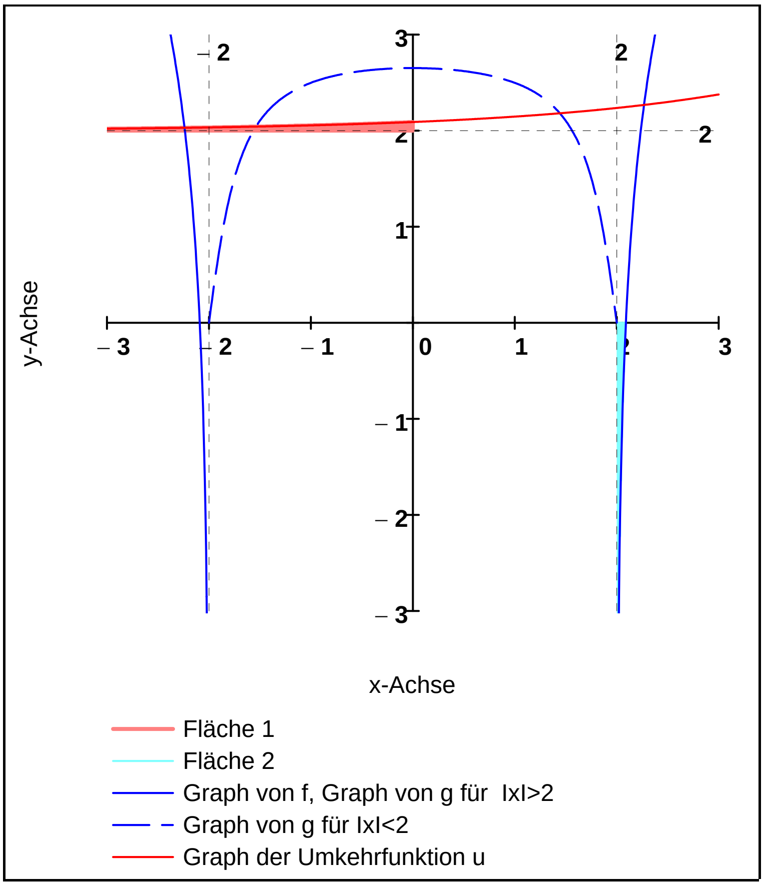
$$g'_2(x) = \frac{-2}{1 + \left(x^2 - 4\right)^2}\cdot 2\cdot x = \frac{-4\cdot x}{x^4 - 8\cdot x^2 + 17}$$

G_{f2} besitzt keine Extrempunkte (1.3)

$g'_2(x) = 0$ $\qquad -4x = 0$ $\qquad x = 0$ $\qquad g_2(0) = 2\cdot\text{atan}(4) = 2.652$

Vorzeichenwechsel von g'_2 an der Stelle x = 0 von Plus nach Minus: Hochpunkt **H(0/ 2·arctan(4))** .

Aufgabe 2.3 **(6 BE)**
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion g einschließlich seiner Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem für $|x| \le \mathbf{2.5}$ (1 LE = 1 cm).



Aufgabe 2.4 **(7 BE)**
Begründen Sie, dass für die Funktion h mit $h(x) = f_2(x)$, $D_h =]\,2\,;\ \infty\,[$ eine Umkehrfunktion h^{-1} existiert. Bestimmen Sie deren Funktionsgleichung und geben Sie die maximale Definitionsmenge von h^{-1} an. Zeichnen Sie zusätzlich in das Koordinatensystem aus Aufgabe 2.3 den Graphen der Umkehrfunktion h^{-1} einschließlich seiner Asymptote ein.

$f_2(x) = 2 \cdot \ln\left(x^2 - 4\right) + 2$ $\quad y = 2 + 2 \cdot \ln\left(x^2 - 4\right)$ $\quad W_h = IR$

Vertauschen der Variablen: $x = 2 + 2 \cdot \ln\left(y^2 - 4\right)$

Auflösen nach y: $\dfrac{x-2}{2} = \ln\left(y^2 - 4\right) \Leftrightarrow e^{\frac{x-2}{2}} = y^2 - 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 + e^{\frac{x-2}{2}}$

Wurzel ziehen: $y = \sqrt{4 + e^{\frac{x-2}{2}}}$ $\quad y_2 = -\sqrt{4 + e^{\frac{x-2}{2}}}$ keine Lösung

$W_{u1} =]\,2\,;\ \infty\,[$ $\quad D_{u1} = IR$

Aufgabe 2.5 **(8 BE)**

Der Graph der Umkehrfunktion $\mathbf{h^{-1}}$, die Gerade $\mathbf{y = 2}$ und die Gerade $\mathbf{x = 0}$ begrenzen im 2. Quadranten eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche. Zeigen Sie mithilfe der Funktion g, dass die Maßzahl dieser Fläche endlich ist, und berechnen Sie diese Maßzahl auf 4 Nachkommastellen genau.

$$A = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 (u_1(x) - 2)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \left(\sqrt{4 + e^{\frac{x-2}{2}}} - 2\right) dx$$

Nullstelle von f_2: $\quad x_0 := \sqrt{e^{-1} + 4}$

$$A = \lim_{b \to 2} \int_b^{x_0} -f_2(x)\,dx = \lim_{b \to 2} \int_b^{x_0} -\left(2 + 2 \cdot \ln\left(x^2 - 4\right)\right) dx$$

$$A = \lim_{b \to 2} \int_b^{x_0} [-2 \cdot (1 + \ln(x + 2) + \ln(x - 2))]\,dx$$

Stammfunktion von $f_2(x)$:

$$F(x) = 2 \cdot [x - (x + 2) + (x + 2) \cdot \ln(x + 2) - (x - 2) + (x - 2) \cdot \ln(x - 2)]$$

$$F(x) := 2 \cdot [-x + (x + 2) \cdot \ln(x + 2) + (x - 2) \cdot \ln(x - 2)]$$

$$x_0 := 2.09$$

$$F(x_0) - F(b) \to 2 \cdot b - 2 \cdot \ln(b - 2) \cdot (b - 2) - 2 \cdot \ln(b + 2) \cdot (b + 2) + 6.9084676454901939321$$

$$A(b) := -\lim_{b \to 2^+} \left(F(x_0) - F(b)\right) \qquad A(b) = 0.1819$$

Aufgabe 3 (9 BE)
Für einen Laborversuch wird eine Kupfersulfatlösung gebraucht, deren Konzentration y(t) mit der Zeit t abnimmt. Dazu wird einem Behälter eine Kupfersulfatlösung mit einer bestimmten Konzentration und dem Volumen V bereitgestellt.
Während des Versuchs fließt eine weitere Kupfersulfatlösung mit konstanter Durchflussmenge Q und konstanter Konzentration k_0 in den Behälter. Gleichzeitig fließt die selbe Durchflussmenge Q bereits vermischter Kupfersulfatlösung aus dem Behälter ab. In dieser Versuchsphase gelte für die Konzentration y(t) der Kupfersulfatlösung im Behälter die folgende Differentialgleichung:

$\mathbf{y'(t) = \frac{Q}{V}\cdot k_0 - \frac{Q}{V}\cdot y(t)}$ mit $\mathbf{Q}, \mathbf{k_0}$ und $\mathbf{V}$ konstant, $\mathbf{t \geq 0}$.

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante C, wenn sich zum Zeitpunkt t = 0 im Behälter eine Kupfersulfatlösung mit der Konzentration $\mathbf{30\cdot\frac{g}{l}}$ befindet und $\mathbf{k_0 = 24\cdot\frac{g}{l}}$ ist.

[Teilergebnis: $\mathbf{y(t) = C\cdot e^{-\frac{Q}{V}\cdot t} + k_0}$]

Gegeben ist die DGL: $\mathbf{y' + q\cdot y = q\cdot k_0}$ mit $\mathbf{q = \frac{Q}{V}}$

Homogene DGL: $\mathbf{y' + q\cdot y = 0}$

Triviale Lösung: $\mathbf{y = 0}$

Differentialquotient: $\mathbf{\frac{dy}{dt} = -q\cdot y}$

Trennen der Variablen: $\mathbf{\frac{dy}{y} = -q\cdot dt}$ mit $\mathbf{y \neq 0}$

Integration: $$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -q\,dt \quad\Leftrightarrow\quad \ln(|y|) = -q\cdot t + c$$

Delogarithmieren: $\mathbf{|y| = e^{-q\cdot t + c}}$

$\mathbf{y > 0}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{y_H = D\cdot e^{-q\cdot t}}$ mit K $\in$ IR (mit trivialer Lösung)

Variation der Konstanten: $\mathbf{y_S = D(t)\cdot e^{-q\cdot t}}$ $\mathbf{y'_S = D'(t)\cdot e^{-q\cdot t} + D(t)\cdot(-q)\cdot e^{-q\cdot t}}$

Einsetzen in inhomogene DGL: $\mathbf{y' + q\cdot y = q\cdot k_0}$

$$D'(t)\cdot e^{-q\cdot t} + D(t)\cdot(-q)\cdot e^{-q\cdot t} + q\cdot\left(D(t)\cdot e^{-q\cdot t}\right) = q\cdot k_0 \text{ erweitern } \rightarrow D'(t)\cdot e^{-q\cdot t} = k_0\cdot q$$

$$D'(t) = k_0\cdot q\cdot e^{q\cdot t}$$

Integration: $D(t) = \int k_0\cdot q\cdot e^{q\cdot t}\,dt \rightarrow t^2 + 4\cdot t + 4\cdot e^{-1} + 4 = k_0\cdot e^{q\cdot t}$

$\Rightarrow$ $y_S = k_0\cdot e^{q\cdot t}\cdot e^{-q\cdot t} = k_0$

Allgemeine Lösung: $y_A(t) = D\cdot e^{-q\cdot t} + k_0 \quad \Leftrightarrow \quad y_A(t) = D\cdot e^{-\frac{Q}{V}\cdot t} + k_0$

$$y_A(0) = 30\cdot\frac{g}{l} \quad \Leftrightarrow \quad D\cdot e^0 + 24\cdot\frac{g}{l} = 30\cdot\frac{g}{l} \quad \Leftrightarrow \quad D = 6\cdot\frac{g}{l}$$

Konkreter Funktionsterm: $\boxed{y_A(t) = 6\cdot\frac{g}{l}\cdot e^{-\frac{Q}{V}\cdot t} + 24\cdot\frac{g}{l}}$