Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2002

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

made with mathcad

Aufgabe 1.0
Eine Krankheit wird vom Erreger K ausgelöst. Das Medikament M heilt die Krankheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%.

Aufgabe 1.1
Es werden nun 10 an dieser Krankheit leidende Patienten mit dem Medikament M behandelt.
Die Ereignisse A, B, C und D sind wie folgt beschrieben:
A: *Die Anzahl der geheilten Patienten entspricht genau dem Erwartungswert.*
B: *Mindestens vier Patienten werden geheilt.*
C: *Die ersten beiden Patienten werden geheilt.*
D: *Nur die ersten fünf Patienten werden geheilt.*

Aufgabe 1.1.1 (4 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P(A), P(B), P(C) und P(D).

$\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0.6 = 6$

$P(A) = P(X = 6) = B(10, 0.6, 6) = 0.25082$ TW Seite 26

$P(B) = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{3} B(10, 0.6, i) = 1 - 0.05476 = 0.94524$ TW S. 26

$P(C) = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36$

$P(D) = 0.6^5 \cdot 0.4^5 = 0.000796$

Aufgabe 1.1.2 (3 BE)
Untersuchen Sie durch Rechnung, ob die Ereignisse A und C stochastisch abhängig sind.

$P(A \cap C) =$ TW S. 26

$0.6 \cdot 0.6 \cdot B(8, 0.6, 4) = 0.36 \cdot 0.23224 = 0.08361$

$P(A) \cdot P(C) = 0.25082 \cdot 0.36 = 0.09030$

$0.08361 \neq 0.09030 \quad \Rightarrow$ stochastisch abhängig

Aufgabe 1.2 (5 BE)
Berechnen Sie, wie viele Personen mindestens behandelt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament in wenigstens einem Fall Erfolg hat, größer als 99% ist.

$$P(X \geq 1) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) < 0.01$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^n < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad 0.4^n < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0.4) < \ln(0.01)$$

$$n > \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.4)} \quad \Leftrightarrow \quad n > 5.026 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 6$$

Es müssen mindestens 6 Patienten behandelt werden.

Aufgabe 1.3 (6 BE)
Es entsteht der Verdacht, dass die Herstellerangabe bezüglich der Erfolgsquote zu hoch ist. Dazu werden 60 erkrankte Patienten, die mit diesem Medikament behandelt wurden, betrachtet.
Geben Sie bezüglich der Nullhypothese H_0: $p := 0.6$ die Testart an und bestimmen Sie den Annahmebereich bei einem Signifikanzniveau von 1%.

Testgröße: Anzahl geheilter Patienten unter $n := 60$

Nullhypothese H_0 : $p \geq 0.6$

Gegenhypothese H_0 : $p < 0.6$

Linksseitiger Test:

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 0, 1, ..., k \}$

Annhamebereich: $A = \{ k + 1, k + 2, ..., 60 \}$

$P(\overline{A}) \leq 0.01$ Binomialverteilung nicht im Tafelwerk

$\mu := 60 \cdot 0.6$ $\mu = 36$ $\sigma := \sqrt{60 \cdot 0.6 \cdot 0.4}$ $\sigma = 3.795$ > 3, Normalverteilung

$$\Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.01 \qquad \frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \leq -2.326$$ TW Seite 52

$$k \leq -2.326 \cdot 3.795 + 36 - 0.5 \qquad k \leq 26.673$$

$$\overline{A} = \{ 0, 1, ..., 26 \} \qquad A = \{ 27, 28, ..., 60 \}$$

Aufgabe 1.4 **(8 BE)**
Der Hersteller seinerseits hat vor, das Medikament nicht weiter zu vertreiben, wenn bei einer Stichprobe mit gerader Stichprobenläng in mindestens der Hälfte der Fälle kein Erfolg eintritt. Wie groß muss die Anzahl der untersuchten Personen mindestens gewählt werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass er sein Produkt zurückzieht, obwohl die Erfolgsquote in Wirklichkeit doch 60 % beträgt, unter 1 % liegen soll?

Erfolgsquote: $p_e := 0.6$ Misserfolg: $p_m := 0.4$ $n := n$

$\mu(n) := n \cdot p_m = 0.4 \cdot n$ $\sigma(n) := \sqrt{p_m \cdot (1 - p_m)} \cdot \sqrt{n}$ Gleitkommazahl, 4 $\rightarrow 0.4899 \cdot \sqrt{n}$

$P(E) = P\left(X \geq \frac{n}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{n}{2} - 1\right)$ $1 - P\left(X \leq \frac{n}{2} - 1\right) < 0.01$

$P\left(X \leq \frac{n}{2} - 1\right) > 0.99$ $\Phi\left(\dfrac{\frac{n}{2} - 1 - \mu(n) + 0.5}{\sigma(n)}\right) > 0.99$

TW $\dfrac{\frac{n}{2} - 1 - \mu(n) + 0.5}{\sigma(n)} > 2.326$

$\frac{n}{2} - 1 - 0.4 \cdot n + 0.5 > 2.326 \cdot 0.4899 \cdot \sqrt{n}$

Substitution: $z = \sqrt{n}$ Nebenrechnung: $2.326 \cdot 0.4899 = 1.13951$

$0.1 \cdot z^2 - 1.13951 \cdot z - 0.5 = 0$ auflösen, $z \rightarrow \begin{pmatrix} 11.818177092259419786 \\ -0.42307709225941978 56 \end{pmatrix}$ Lösung / keine Lösung

$n := 11.82^2 = 139.712$

Es müssen also $n_0 := \text{ceil}(n) = 140$ Personen untersucht werden.

Aufgabe 1.5 (5 BE)
Bestimmen Sie für $p := 0.6$ ein möglichst kleines Intervall um den Erwartungswert, in welchem sich mit mindestens 80 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der geheilten Patienten befindet, wenn das Medikament bei $n := 1000$ Personen angewendet wird.

$\mu := n \cdot p = 600$ $\quad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 15.492$ $\quad k := k$ $\quad c := c$

$P(\mu - k \le X \le \mu + k) \ge 0.80$

$$\Phi\left(\frac{\mu + k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - k - 1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.80$$

$$\Phi\left(\frac{k + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-k - 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.80 \qquad \Phi\left(\frac{k + 0.5}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{k + 0.5}{\sigma}\right)\right) \ge 0.80$$

$$2 \cdot \Phi\left(\frac{k + 0.5}{\sigma}\right) \ge 1.80 \qquad \Phi\left(\frac{k + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.90$$

TW: $\frac{k + 0.5}{\sigma} \ge 1.281$ auflösen, k $\rightarrow 19.345166665966804708 \le k < \infty$

$k_0 := \left(\frac{k + 0.5}{\sigma} = 1.281\right)$ auflösen, k $\rightarrow 19.345166665966804708$

$k_0 = 19.345$

$\mu + k_0 = 619.345$ obere Grenze aufrunden: $\mathrm{ceil}(\mu + k_0) \rightarrow 620$

$\mu - k_0 = 580.655$ untere Grenze aufrunden: $\mathrm{ceil}(\mu - k_0) \rightarrow 581$

Probe: $\mathrm{pnorm}(620.5, \mu, \sigma) - \mathrm{pnorm}(581.5 - 1, \mu, \sigma) = 0.803$

Aufgabe 1.6 (5 BE)
Nun werden nur die Patienten betrachtet, bei denen das Medikament M erfolgreich war. Die Zufallsgröße X steht in nachfolgender Tabelle für die Anzahl der Wochen, die von der ersten Anwendung bis zur vollständigen Heilung verstreichen.

$$\begin{pmatrix} \text{"Anzahl der Wochen x"} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{"P(X=x)"} & a & b & 0.4 & 0.15 \end{pmatrix}$$

ermitteln Sie a und b, wenn der Erwartungswert E(x) = 4.6 beträgt.
Berechnen Sie die Standardabweichung.
[Teilergebnis: **a = 0.1**]

Vorgabe

$$a + b + 0.4 + 0.15 = 1$$

$$3 \cdot a + 4 \cdot b + 5 \cdot 0.4 + 6 \cdot 0.15 = 4.6$$

$$\text{Suchen}(a, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

$a = 0.1$ $\qquad$ $b = 0.35$

$$Var\_X := 3^2 \cdot 0.1 + 4^2 \cdot 0.35 + 5^2 \cdot 0.4 + 6^2 \cdot 0.15 - 4.6^2 = 0.74000$$

$\sigma := \sqrt{Var\_X}$ $\qquad$ $\sigma = 0.86023$

Aufgabe 5 (5 BE)
Der Medikamentenhersteller möchte nun 10 Personen anschreiben, die mit dem Medikament behandelt wurden, um ihnen einen Fragebogen zuzusenden, in welchem er über eventuell auftretende Nebenwirkungen berichtet werden soll. Er wählt dazu aus einer Adressenliste, die 20 Namen enthält, willkürlich 10 Adressen aus, ohne zu wissen, dass 5 der 20 Adressen nicht mehr zutreffen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens 9 Personen tatsächlich erreicht.

Urnenmodell ohne Zurücklegen. $\quad N := 20 \quad n := 10 \quad K := 15 \quad k = 9 \vee k = 10$

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \frac{\binom{15}{9} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{20}{10}} + \frac{\binom{15}{10} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{20}{10}}$$

Nebenrechnungen: $\quad \text{combin}(15, 9) = 5005 \qquad \text{combin}(15, 10) = 3003$

$\text{combin}(5, 1) = 5 \qquad \text{combin}(5, 0) = 1$

$\text{combin}(20, 10) = 184756$

$$P(X \geq 9) = \frac{5005 \cdot 5 + 3003 \cdot 1}{184756} = 0.1517$$