Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2005

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

made with mathcad

Die Firma Schraubfix hat sich auf den Vertrieb von Schrauben spezialisiert. Für eine Autofirma liefert sie zwei Arten von Schrauben, die sich nur in der Festigkeit unterscheiden. Für die folgenden Aufgaben werden die Schrauben mit hoher Festigkeit als Schrauben A und die mit niedriger Festigkeit als Schrauben B bezeichnet.

Aufgabe 1 (8 BE)
In einer Kiste sind 10 Schrauben der Qualität A und 20 Schrauben der Qualität B vermischt. Die zwei Qualitäten sind im Aussehen gleich.
Es werden 10 Schrauben nacheinander zufällig aus der Kiste entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) darunter 5 Schrauben der Qualität A und 5 Schrauben der Qualität B sind,
b) zuerst 5 Schrauben der Qualität A und dann 5 Schrauben der Qualität B entnommen werden,
c) darunter 5 Schrauben der Qualität A und 5 Schrauben der Qualität B sind
und die 5 Schrauben der Qualität A aufeinanderfolgend entnommen werden,
d) darunter 5 Schrauben der Qualität A und 5 Schrauben der Qualität B sind
und die 5 Schrauben der Qualität A oder 5 Schrauben der Qualität B aufeinanderfolgend entnommen werden,

Urnenmodell ohne Zurücklegen: $P(X = k) = \dfrac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Schrauben insgesamt: $N := 30$ Stichprobe (Teilmenge): $n := 10$

Merkmal A: $K := 10$

Merkmal B: $N - K = 20$

Teilaufgabe a)

Es kommt nicht auf die Reihenfolge an, es müssen also alle möglichen Kombinationen berechnet werden.

Schrauben A: $k := 5$ Schrauben B: $n - k = 5$

$$P_a = \frac{\binom{10}{5} \cdot \binom{20}{5}}{\binom{30}{10}} = \frac{252 \cdot 15504}{30045015} = 0.13004$$

$$P_a := \frac{\text{combin}(10,5) \cdot \text{combin}(20,5)}{\text{combin}(30,10)} \qquad P_a = 0.13004$$

Teilaufgabe b)

Ereignis: { $(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B})$ }

Baumdiagramm ohne Zurücklegen, nur einzelne Zweige

$$P_b := \frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{8}{28}\cdot\frac{7}{27}\cdot\frac{6}{26}\cdot\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}\cdot\frac{17}{22}\cdot\frac{16}{21}$$

$P_b = 0.00052$

Teilaufgabe c)

Möglichkeiten der Entnahme

$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B})$ $(\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B})$ $(\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B})$

$(\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B})$ $(\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B})$ $(\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A})$

$P_c := 6\cdot P_b$

$P_c = 0.003096$

Teilaufgabe d)

$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B})$ $(\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B})$ $(\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B})$

$(\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B})$ $(\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B})$ $(\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A})$

$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A})$ $(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A})$ $(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A})$

$(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A})$

$P_d := 10\cdot P_b$

$P_d = 0.00516$

Aufgabe 2 (8 BE)
An jedem Tag werden 3500 Schrauben der Qualität A und 2500 der Qualität B an eine Firma geliefert. Die Schrauben werden entweder mit einem LKW oder der Bahn transportiert.

40 % der Schrauben A werden mit LKW ausgeliefert und $\frac{3}{5}$ der mit dem LKW ausgelieferten Schrauben sind Schrauben der Qualität B. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Schraube der Qualtität B mit der Bahn geliefert werfen?

Schraube der Qualität A: $\mathbf{A}$

Schraube der Qualität B: $\overline{\mathbf{A}}$

Lieferung mit LKW: $\mathbf{L}$

Lieferung mit der Bahn: $\overline{\mathbf{L}}$

Gesamtzahl der Schrauben: $3500 + 2500 = 6000$

Gegeben: $P(A) := \frac{3500}{6000} = \frac{7}{12} \quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = \frac{5}{12}$

$$P_A(L) = 0.4 \quad \Rightarrow \quad P_A(\overline{L}) = 0.6$$

$$P_L(\overline{A}) = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad P_L(A) = \frac{2}{5}$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & L & \overline{L} & \blacksquare \\ A & \blacksquare & \blacksquare & \frac{7}{12} \\ \overline{A} & \blacksquare & \blacksquare & \frac{5}{12} \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $P_{\overline{A}}(\overline{L}) \quad \Rightarrow$

Lösung: $P_A(L) = \frac{P[A(\cap)L]}{P(A)}$

$$\Rightarrow \quad P[A(\cap)L] = P_A(L) \cdot P(A) = 0.4 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{30}$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & L & \overline{L} & \blacksquare \\ A & \frac{7}{30} & \frac{7}{20} & \frac{7}{12} \\ \overline{A} & \blacksquare & \blacksquare & \frac{5}{12} \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_L(A) = \frac{P[A(\cap)L]}{P(L)} \quad \Rightarrow \quad P(L) = \frac{P[A(\cap)L]}{P_L(A)} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{12}$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & L & \overline{L} & \blacksquare \\ A & \frac{7}{30} & \frac{7}{20} & \frac{7}{12} \\ \overline{A} & \blacksquare & \blacksquare & \frac{5}{12} \\ \blacksquare & \frac{7}{12} & \frac{5}{12} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{7}{12} - \frac{7}{30} \rightarrow \frac{7}{20}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{7}{20} \rightarrow \frac{1}{15}$$

ergänzen:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & L & \overline{L} & \blacksquare \\ A & \frac{7}{30} & \frac{7}{20} & \frac{7}{12} \\ \overline{A} & \frac{7}{20} & \frac{1}{15} & \frac{5}{12} \\ \blacksquare & \frac{7}{12} & \frac{5}{12} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{L}) = \frac{P[\overline{A}(\cap)\overline{L}]}{P_L(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{25}$$

Aufgabe 3
Auf Grund der hohen Nachfrage nach Schrauben A muss die Firma Schraubfix Schrauben von dem neuen Produzenten Superfest dazukaufen. Die Firma Schraubfix überprüft die Qualität der Schrauben des Produzenten Superfest nach Klagen der belieferten Kunden in einem Signifikanztest.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)
Die Firma Superfest behauptet, dass der Ausschussanteil ihrer Schrauben höchstens 2 % ist (Nullhypothese). Die Nullhypothese soll nun auf dem Signifikanzniveau von 1 % getestet werden.
Geben Sie die Testgröße an und bestimmen Sie dazu den Annahmebereich und den Ablehnungsbereich der Nullhypothese, wenn eine Tageslieferung von 5000 Schrauben geprüft wird.

Testgröße: Anzahl der Ausschussstücke unter $n := 5000$ überprüften Schrauben des Produzenten Superfest.
Ausschussanteil: $p := 0.02$

H_0: $p_0 \le p \rightarrow p_0 \le 0.02$ H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.02$

Testart: Rechtsseitiger Signifikanztest

$\mu := n \cdot p = 100$ $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 9.899$

$A = \{ 0, 1, \ldots, k \}$ $\overline{A} = \{ k+1, k+2, \ldots, 5000 \}$

$P(\overline{A}) \le 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \ge k+1) \le 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le k) \le 0.01$

$\Leftrightarrow \quad P(X \le k) \ge 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.99$

TW $\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \ge 2.326$ $k := 2.326 \cdot \sigma + \mu - 0.5 = 122.526$

aufrunden: $k := 123$

$A = \{ 0, 1, \ldots, 123 \}$ $\overline{A} = \{ 124, 125, \ldots, 5000 \}$

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)
wie groß ist bei obiger Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit dafür, das man die Nullhypothese nicht ablehnen darf, obwohl der Ausschussanteil 3 % beträgt.

$p_2 := 0.03$ $\mu_2 := n \cdot p_2 = 150$ $\sigma_2 := \sqrt{n \cdot p_2 \cdot (1 - p_2)} = 12.062$

$$P(A) = P(X \le 123) = \Phi\left(\frac{123 - \mu_2 + 0.5}{\sigma_2}\right) = \Phi(-2.197) = 1 - \Phi(2.197) = 1 - 0.98610 = 0.01390$$

Aufgabe 4 (8 BE)
Bei der Lieferung von Spezialschrauben für einen anderen Kunden gerät die Firma Schraubfix wegen eines Streiks bei einem Stammproduzenten in einen Lieferengpass. Da sie diesen Kunden nicht verlieren möchte, kauft sie auch hier von einem neuen Produzenten zu. Diese Firma garantiert, dass höchstens 1 % der Schrauben den Ansprüchen nicht entsprechen. Wie viele Schrauben müssen vom neuen Produzenten dazugekauft werden, damit mit einer Sicherheit von 99,5 % mindestens 4000 fehlerfreie Schrauben an den Kunden geliefert werden können?

Zufallsgröße: Anzahl X der fehlerfreien Schrauben unter n vom neuen Produzenten gekauften Schrauben. n unbekannt, $p := 0.99$.

$$P(X \geq 4000) \geq 0.995 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 3999) \geq 0.995 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 3999) \leq 0.005$$

$$\mu(n) := n \cdot p = 0.99 \cdot n \qquad \sigma(n) := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{0.0099 \cdot n}$$

$$\Phi\left(\frac{3999 - \mu(n) + 0.5}{\sigma(n)}\right) \leq 0.005 \qquad \text{TW} \qquad \frac{3999 - \mu(n) + 0.5}{\sigma(n)} \leq -2.576$$

$$3999 - 0.99 \cdot n + 0.5 \leq -2.576 \cdot \sqrt{0.0099} \cdot \sqrt{n}$$

Substitution: $\sqrt{n} = z$ $\qquad 0.99 \cdot z^2 - 2.576 \cdot \sqrt{0.0099} \cdot z - 3999.5 \geq 0$

$$0.99 \cdot z^2 - 2.576 \cdot \sqrt{0.0099} \cdot z - 3999.5 = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} -63.43088268067816175 \\ 63.68978042188893478 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{keine Lsg.} \\ \text{Lösung} \end{matrix}$$

Resubstitution: $n := 63.69^2$ $\qquad n = 4056.416$ $\qquad$ aufrunden: $\boxed{n = 4057}$