Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 12 Technik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4}\right)$ mit der maximalen Definitionsmenge D_f. Der Graph von f wird mit D_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Zeigen Sie, dass gilt: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ -2 ; 2 \}$.

$$f(x) := \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4}\right)$$

Zähler: $x^2 - 4 \cdot x + 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$

Nenner: $x^2 + 4 \cdot x + 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -2$

Argument: $\frac{(x-2)^2}{(x+2)^2} > 0$ Quadrate immer pos. für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)
Berechnen Sie die Nullstelle von f.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 \cdot x + 4 = x^2 + 4 \cdot x + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 8 \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 0$$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

$$f(-x) = \frac{1}{4} \cdot \ln\left[\frac{(-x)^2 - 4 \cdot (-x) + 4}{(-x)^2 + 4 \cdot (-x) + 4}\right] = \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 + 4 \cdot x + 4}{x^2 - 4 \cdot x + 4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\ln\left(x^2 + 4 \cdot x + 4\right) - \ln\left(x^2 - 4 \cdot x + 4\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{4} \cdot \left(\ln\left(x^2 - 4 \cdot x + 4\right) - \ln\left(x^2 + 4 \cdot x + 4\right)\right) = \frac{-1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4}\right) = -f(x)$$

Teilaufgabe 1.4 (7 BE)
Bestimmen Sie das Verhalten von f(x) bei Annäherung von x an die Definitionslücken sowie für $|x| \rightarrow \infty$ und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{x^2 - 4 \cdot x + 4}}{\underset{\underset{16}{\downarrow}}{x^2 + 4 \cdot x + 4}} \right) \rightarrow 0 \qquad \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \right) \right) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{x^2 - 4 \cdot x + 4}}{\underset{\underset{16}{\downarrow}}{x^2 + 4 \cdot x + 4}} \right) \rightarrow 0 \qquad \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \right) \right) \rightarrow -\infty$$

Symmetrie: $\lim_{x \to -2^+} f(x) \rightarrow \infty$ $\qquad \lim_{x \to -2^-} f(x) \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \right) \rightarrow 1 \quad \text{Zählergrad = Nennergrad} \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \right) \right) \rightarrow 0$$

Symmetrie: $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \right) \right) \rightarrow 0$

senkrechte Asymptoten: $x = -2$ $\qquad x = 2$

waagrechte Asymptote: $y = 0$

Teilaufgabe 1.5 **(9 BE)**

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4}$]

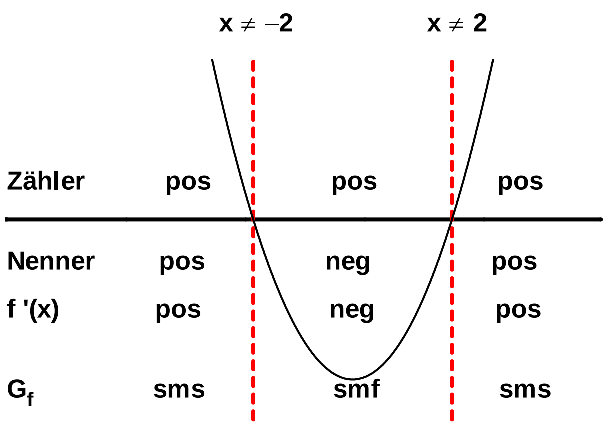
$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x^2 + 4 \cdot x + 4}{x^2 - 4 \cdot x + 4}\right) \cdot \frac{(2 \cdot x - 4) \cdot \left(x^2 + 4 \cdot x + 4\right) - \left(x^2 - 4 \cdot x + 4\right) \cdot (2 \cdot x + 4)}{\left(x^2 + 4 \cdot x + 4\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \cdot \frac{2 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 4 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 16 - 2 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 8 \cdot x - 16}{x^2 - 4 \cdot x + 4}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \cdot \frac{8 \cdot x^2 - 32}{x^2 - 4 \cdot x + 4}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{8 \cdot \left(x^2 - 4\right)}{(x + 2)^2 \cdot (x - 2)^2} = \frac{2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{(x + 2)^2 \cdot (x - 2)^2} = \frac{2}{(x + 2) \cdot (x - 2)} = \frac{2}{x^2 - 4}$$

$f'(x) \neq 0$



G_f ist streng monoton steigend in $]-\infty\,;\,-2[$, G_f ist streng monoton fallend in $]-2\,;\,2[$, und G_f ist streng monoton steigend in $]2\,;\,\infty[$,

Teilaufgabe 1.6 (6 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von f und die Koordinaten des Wendepunkts von G_f.

$$f'(x) = 2\cdot\left(x^2 - 4\right)^{-1} \qquad f''(x) = 2\cdot(-1)\cdot\left(x^2 - 4\right)^{-2}\cdot 2\cdot x = \frac{-4\cdot x}{\left(x^2 - 4\right)^2}$$

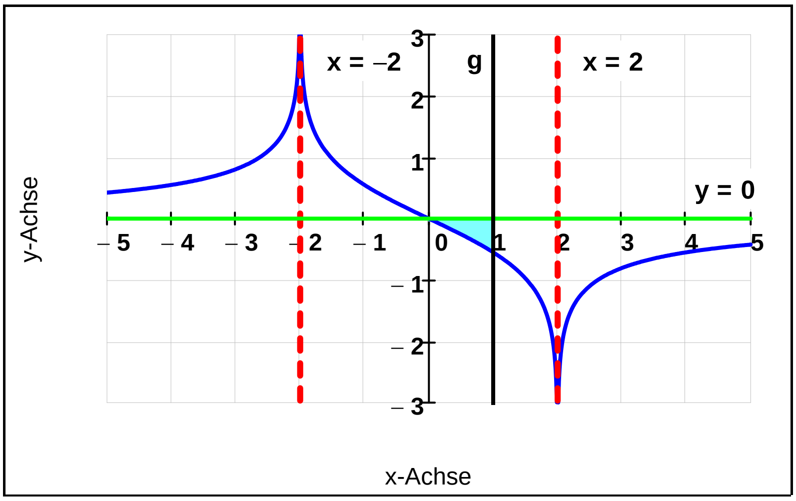
$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4\cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

		$x \neq -2$		$x = 0$		$x \neq 2$	
Zähler	**pos**		**pos**		**neg**		**pos**
Nenner	**pos**		**pos**		**pos**		**pos**
f ''(x)	**pos**		**pos**		**neg**		**neg**
G_f	**lk**		**lk**		**rk**		**rk**
				WP			

G_f ist linksgekrümmt in $]-\infty\,;\,-2[$, G_f ist linksgekrümmt in $]-2\,;\,0]$, und
G_f ist rechtsgekrümmt in $[0\,;\,2[$ und G_f ist rechtsgekrümmt in $]2\,;\,\infty]$.

$$f(0) = \frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{WP(0/0)}$$

Teilaufgabe 1.7 (6 BE)
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von f zusammen mit seinen Asymptoten für $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm



x1 =	f(x1) =
0	0
1	-0.5
1.5	-1
2.5	-1.1
3	-0.8
4	-0.5
5	-0.4

Teilaufgabe 1.8.0
Im vierten Quadranten schließt G_f zusammen mit der x-Achse und der senkrechten Geraden g mit der Gleichung $x = 1$ ein endliches Flächenstück ein.

Teilaufgabe 1.8.1 (2 BE)
Ergänzen Sie in der Zeichnung aus 1.7 die Gerade g und markieren Sie das beschriebene Flächenstück.

Teilaufgabe 1.8.2 (6 BE)

Gegeben ist die Funktion F mit $F(x) = -\ln(2-x) - \ln(2+x) + x \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4}\right)$ mit

$D_F = [\,0\,;\,2\,]$. Zeigen Sie, das F für $x \in D_F$ eine Stammfunktion von f ist.

$$F(x) = -\ln(2-x) - \ln(2+x) + x \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4}\right) = -\ln(2-x) - \ln(2+x) + x \cdot f(x)$$

$$F'(x) = \frac{-1}{2-x} \cdot (-1) - \frac{1}{2+x} + 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x) = \frac{2 + x - (2-x)}{(2-x) \cdot (2+x)} + f(x) + x \cdot \frac{2}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{-(2 \cdot x)}{x^2 - 4} + f(x) + x \cdot \frac{2}{x^2 - 4} = f(x)$$

Teilaufgabe 1.8.3 (4 BE)
Berechnen Sie die Flächenmaßzahl A des Flächenstücks aus 1.8.0 und geben Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen gerundet an.

$$A(u) = -\int_0^1 f(x)\,dx = -(F(1) - F(0)) = F(0) - F(1)$$

$$= -\ln(2) - \ln(2) - \left(-\ln(1) - \ln(3) + 1\cdot\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{1}{9}\right)\right)$$

$$= -2\cdot\ln(2) + \ln(3) + \frac{1}{4}\cdot\ln(9) = 0.262$$

Teilaufgabe 2.0
In einem Fluss nimmt das Wasser beim Fließen Sauerstoff aus der Luft auf. Außerdem wird im Wasser Sauerstoff durch bestimmte Arten von Algen in Abhängigkeit von der Sonnenlichteinstrahlung produziert. Gleichzeitig wird während des ganzen Tages Sauerstoff von allen Organismen im Wasser verbraucht.

An einer bestimmten Messstelle ändert sich die Sauerstoffkonzentration k(t) in $\frac{mg}{l}$ des Flusswassers im Verlauf eines Tages sinusförmig mit der Periodendauer $T = 24\cdot h$. Der Verlauf kann näherungsweise durch $k(t) = a\cdot\sin(b\cdot t + c) + d$ beschrieben werden, wobei t mit $0 \le t \le 24$ die seit 0 Uhr verstrichene Zeit in Stunden beschreibt.

Kontinuierliche Messungen über einen ganzen Tag hinweg ergaben das Minimum der Sauerstoffkonzentration im Wasser von $4.20\cdot\frac{mg}{l}$ um 4.00 Uhr morgens und das Maximum von $11.8\cdot\frac{mg}{l}$ um 16.00 Uhr am Nachmittag.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Geben Sie mit Begründung einen geeigneten Funktionsterm an und skizzieren Sie das Schaubild dazu.

[Mögliches Zwischenergebnis: $k(t) = 3.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + 8$]

Amplitude: $a := \frac{11.8 - 4.2}{2} = 3.8$

Verschiebung: $d := 4.2 + \frac{11.8 - 4.2}{2} = 8$

Winkelgeschw. : $b := \frac{2 \cdot \pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

$t_{min} := 4$ $\qquad t_{max} := 16$ $\qquad t_0 := 4 + \frac{16 - 4}{2} = 10$

Tiefpunkt (4/4,2) einsetzen:

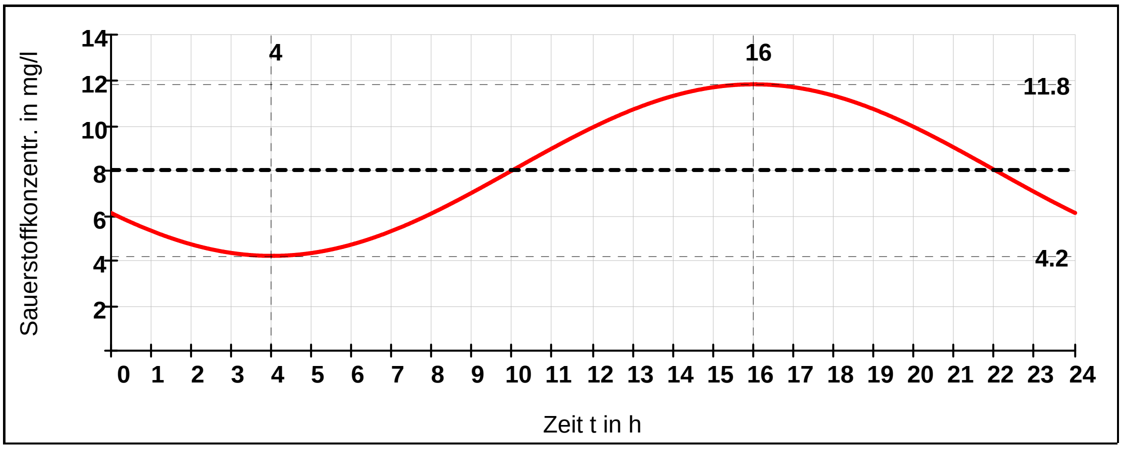
$$3.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 4 + c\right) + 8 = 4.2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 4 + c\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{12} \cdot 4 + c = \frac{3}{2} \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad c := \frac{3}{2} \cdot \pi - \frac{1}{3} \cdot \pi = \frac{7 \cdot \pi}{6} \quad \checkmark$$

$$k(t) := 3.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t + \frac{7 \cdot \pi}{6}\right) + 8$$

Gegeben: $k(t) := 3.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + 8$

t1 =	k(t1) =
0	6.1
2	4.7
4	4.2
6	4.7
8	6.1
10	8
12	9.9
14	11.3
16	11.8
18	11.3
20	9.9
22	8
24	6.1



Teilaufgabe 2.2 (7 BE)
Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der die Abnahme der Sauerstoffkonzentration am größten war. Auf eine Untersuchung an den Rändern des Beobachtungszeitraumes kann dabei verzichtet werden.

1. Ableitung: $k'(t) := 3.8 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right)$

2. Ableitung: $k''(t) := -3.8 \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right)$

Wendestelle: $k''(t) = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) = 0$

$$t_0(n) := \frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6} = n \cdot \pi \text{ auflösen}, t \rightarrow 12 \cdot n + 10$$

Wendestelle, da einfache Nullstellen von $k''(t)$

$t_0(0) = 10 \qquad k'(10) = 0.995 \qquad$ also Zunahme

$t_0(1) = 22 \qquad k'(22) = -0.995 \qquad$ also Abnahme

Größte Abnahme um 22 Uhr.

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)
Berechnen Sie mittels Integration die mittlere Sauerstoffkonzentration des Flusswassers für den Zeitraum von 0:00 Uhr bis 10:00 Uhr auf eine Nachkommastelle genau.

$$\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} k(t)\, dt = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} \left(3.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + 8\right) dt$$

Stammfunktion:

$$K(t) := \int \left(3.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + 8\right) dt = -3.8 \cdot \frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + 8 \cdot t$$

Grenzen einsetzen:

$$M := \frac{1}{10} \cdot \left[-3.8 \cdot \frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 10 - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + 8 \cdot 10 - \left(-3.8 \cdot \frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 0 - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + 8 \cdot 0\right)\right]$$

$M = 5.291$

Die mittlere Sauerstoffkonzentration in der Zeit von 0 Uhr bis 10 Uhr beträgt $5.3 \cdot \frac{mg}{l}$.