

# Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

## • Mathematik 12 Technik - B I - Lösung



### Teilaufgabe 1.0

In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  mit dem Ursprung O sind der Punkt  $P(7|-2|8)$  und die Ebenen E, F und  $G_k$  gegeben:

$$E: -4 \cdot x_1 - x_2 + x_3 + 18 = 0 ; F: 2 \cdot x_1 + x_2 - 12 = 0 ; G_k: x_2 + x_3 + k = 0$$

### Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F.

[ Mögliches Ergebnis:  $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$  ]

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Wähle  $x_2 = \lambda$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \cdot (12 - \lambda) = 6 - \frac{1}{2} \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad x_3 = -18 + \lambda + 4 \cdot \left(6 - \frac{1}{2} \cdot \lambda\right) = 6 - \lambda$$

Schnittgerade s: 
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 - \frac{1}{2} \cdot \lambda \\ \lambda \\ 6 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes R, der durch Spiegelung des Ursprungs O an der Geraden s hervorgeht.

$$\vec{OL}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot \lambda + 3 \\ 6 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 \cdot \lambda + 3 \\ 6 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0.5 \cdot (0.5 \cdot \lambda + 3) - (6 - \lambda) + \lambda = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot \lambda + \frac{3}{2} - 6 + \lambda + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{4} \cdot \lambda - \frac{9}{2} = 0 \text{ auflösen, } \lambda \rightarrow 2$$

$$\vec{OR} = 2 \cdot \vec{OL}(2) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 2 + 3 \\ 6 - 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Spiegelpunkt: } R(8/8/4)$$

**Teilaufgabe 1.3 (4 BE)**

Bestimmen Sie alle Werte von  $k$ , für die die drei Ebenen  $E$ ,  $F$  und  $G_k$  jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben.

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -k \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot (\text{II}) + (\text{I})} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -k \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{III}) - (\text{II})} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -k - 6 \end{pmatrix}$$

keine Lösung, falls:  $-k - 6 \neq 0 \Leftrightarrow -k \neq 6 \Leftrightarrow k \neq -6$

**Teilaufgabe 1.4 (6 BE)**

Zusätzlich sind die Gerade  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$  und der Punkt  $Q(4/4/2)$  gegeben.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte  $S_1$  und  $S_2$  auf der Geraden  $h$  so, dass das Volumen der jeweiligen Pyramide  $OPQS_1$  bzw.  $OPQS_2$  die Maßzahl 27 hat.

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \mu + 3 \\ \mu - 3 \\ 9 - \mu \end{pmatrix}$$

Allgemeine Bedingung:  $\frac{1}{6} \cdot |(\vec{OP} \times \vec{OQ}) \cdot \vec{OS}| = 27$

Nebenrechnungen:  $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -36 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot \mu + 3 \\ \mu - 3 \\ 9 - \mu \end{pmatrix} = 162 - 162 \cdot \mu$

Konkrete Bedingung:  $|162 - 162 \cdot \mu| = 27 \cdot 6$

1. Fall:  $\mu_1 := 162 - 162 \cdot \mu = 27 \cdot 6$  auflösen,  $\mu \rightarrow 0$   $\mu_1 = 0 \Rightarrow S_1(3/-3/9)$

2. Fall:  $\mu_2 := -(162 - 162 \cdot \mu) = 27 \cdot 6$  auflösen,  $\mu \rightarrow 2$   $\mu_2 = 2 \Rightarrow S_2(11/-1/7)$

**Teilaufgabe 2.0**

Ein Fluglotse beobachtet zwei Flugzeuge gleichzeitig, deren jeweilige Positionen  $F_1$  bzw.  $F_2$  sich in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  in einem bestimmten Zeitraum durch folgende Gleichungen beschreiben lassen:

$$\vec{OF}_1 = \begin{pmatrix} -5.6 \\ -5.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in [0; 30]; \quad \vec{OF}_2 = \begin{pmatrix} -7.8 \\ 0.8 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 \in [0; 30];$$

Die Koordinaten von  $\vec{OF}_1$  und  $\vec{OF}_2$  haben die Einheit km, die Parameter  $t_1$  und  $t_2$  beschreiben jeweils die nach dem gleichzeitigen Beobachtungsbeginn verstrichene Zeit in Minuten. Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.

**Teilaufgabe 2.1 (5 BE)**

Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen schneiden, es aber zu keiner Kollision kommt.

$$\begin{pmatrix} -5.6 \\ -5.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.8 \\ 0.8 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaußmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 & -2.2 \\ 0.8 & -0.1 & 6.6 \\ 0.2 & 0 & 2.2 \end{pmatrix}$$

3. Zeile:  $0.2 \cdot t_1 = 2.2$  auflösen,  $t_1 \rightarrow 11.0$   $t_1 := 11$

2. Zeile:  $0.8 \cdot 11 - 0.1 \cdot t_2 = 6.6$  auflösen,  $t_2 \rightarrow 22.0$   $t_2 := 22$

Probe mit der 1. Zeile:  $0.6 \cdot 11 - 0.4 \cdot 22 = -2.2$  wahr  $\begin{pmatrix} -5.6 \\ -5.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Eindeutige Lösung.

Die Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$  stimmen jedoch nicht überein, also keine Kollision.

**Teilaufgabe 2.2 (6 BE)**

Weisen Sie nach, dass zum Zeitpunkt  $t$  ab Beobachtungsbeginn für den Abstand  $d(t)$  zwischen beiden Flugzeugen gilt:  $d(t) = \sqrt{0.57 \cdot t^2 - 9.24 \cdot t + 53.24}$ .

Bestimmen Sie außerdem den Zeitpunkt  $t_{\min}$  (gerundet auf eine Nachkommastelle), zu dem der quadrierte Abstand (also  $(d(t))^2$ ) am geringsten ist.

$$\begin{pmatrix} -5.6 \\ -5.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} - \left[ \begin{pmatrix} -7.8 \\ 0.8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \rightarrow \begin{pmatrix} 0.2 \cdot t + 2.2 \\ 0.7 \cdot t - 6.6 \\ 0.2 \cdot t - 2.2 \end{pmatrix}$$

$$d(t) := \sqrt{(0.2 \cdot t + 2.2)^2 + (0.7 \cdot t - 6.6)^2 + (0.2 \cdot t - 2.2)^2}$$

Nebenrechnungen:

$$(0.2 \cdot t + 2.2)^2 \text{ erweitern } \rightarrow 0.88 \cdot t + 0.04 \cdot t^2 + 4.84$$

$$(0.7 \cdot t - 6.6)^2 \text{ erweitern } \rightarrow -9.24 \cdot t + 0.49 \cdot t^2 + 43.56$$

$$(0.2 \cdot t - 2.2)^2 \text{ erweitern } \rightarrow -0.88 \cdot t + 0.04 \cdot t^2 + 4.84$$

$$0.88 \cdot t + 0.04 \cdot t^2 + 4.84 + (-9.24 \cdot t + 0.49 \cdot t^2 + 43.56) + (-0.88 \cdot t + 0.04 \cdot t^2 + 4.84) = .$$

$$\dots = -9.24 \cdot t + 0.57 \cdot t^2 + 53.24$$

$$d(t) = \sqrt{-9.24 \cdot t + 0.57 \cdot t^2 + 53.24}$$

Hilfsfunktion:  $f(t) := 0.57 \cdot t^2 - 9.24 \cdot t + 53.24$

$$f'(t) := \frac{d}{dt} f(t) = 1.14 \cdot t - 9.24$$

$$f'(t) = 0 \text{ auflösen, } t \rightarrow 8.1052631578947368421 \quad t_{\min} := 8.1$$

$$f''(t) := \frac{d}{dt} f'(t) \rightarrow 1.14 \quad f''(8.1) = 1.14 > 0, \text{ also Tiefpunkt}$$