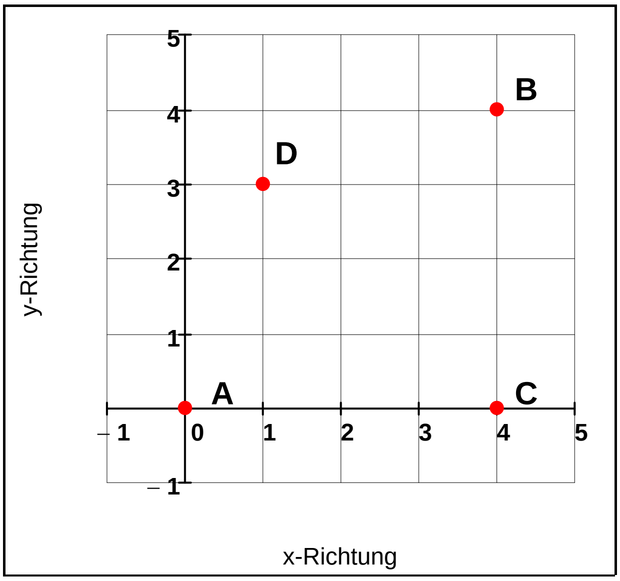
Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1996

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

made with mathcad

Aufgabe 1.0
Das Gitternetz symbolisiert ein Wegenetz. Ein Autofahrer startet im Knoten A und fährt auf einem der kürzesten Wege zum Knoten B. Bei jedem Knoten fährt er entweder in die x-Richtung (**0**) oder in die y-Richtung (**1**); sind an einem Knoten zwei Wege für die Weiterfahrt möglich, trifft er eine Entscheidung durch den Wurf einer Laplace-Münze.



Teilaufgabe 1.1 **(4 BE)**
Geben Sie zunächst an, wie oft der Autofahrer sich auf einem Weg von A nach B für **0** bzw. **1** entscheiden muss. Beschreiben Sie sodann die Struktur der Elemente des Ergebnisraumes genau.

Weg von A nach B: 4 Entscheidungen in x-Richtung und 4 Entscheidungen in y-Richtung.

Der Ergebnisraum besteht also aus 8-er-Tupeln der Form:

$$\Omega = \{ (1,1,1,1,0,0,0,0), (1,1,1,0,1,0,0,0), (1,1,1,0,0,1,0,0), (1,1,1,0,0,0,1,0), ... \}$$

Teilaufgabe 1.2 **(3 BE)**
Begründen Sie, dass es 70 verschiedene kürzeste Wege von A nach B gibt.

Das Problem ist vom Typ *Mississippi*:

$$|\Omega| = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{40320}{24 \cdot 24} = 70$$

NR: $8! = 40320$ $\quad 4! = 24 \quad \frac{40320}{24 \cdot 24} = 70$

Ausführliche Begründung:

Für das Belegen von 4 Plätzen in einem 8-Tupel mit 1 gibt es $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{8!}{4!}$ Möglichkeiten, falls die 1er unterscheidbar sind. Die vier 1er sind aber identisch, sodass jede Permutation der 1er zum gleichen Ergebnis führt. Die Anzahl der Möglichkeiten muss also noch durch $4!$ dividiert werden.

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)
Bestimmen Sie die Anzahl der kürzesten Wege von A nach B, die über den Knoten D führen.

Der Weg von A nach D entspricht einem 4-er-Tupel mit einmal **0** und dreimal **1**, z. B. $(0, 1, 1, 1)$.

Es gibt $\binom{4}{1} = 4$ Möglichkeiten, die **0** auf vier Plätze zu verteilen.

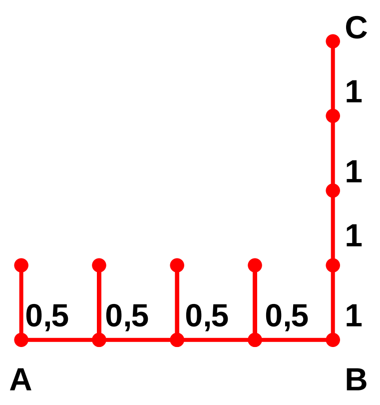
Der Weg von D nach B entspricht einem 4-er-Tupel mit dreimal **0** und einmal **1**, z. B. $(0, 0, 0, 1)$.

Es gibt $\binom{4}{1} = 4$ Möglichkeiten, die **1** auf vier Plätze zu verteilen.
Insgesamt sind es also $4 \cdot 4 = 16$ mögliche Wege von A nach B.

Teilaufgabe 1.4 (3 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Autofahrer über den Knoten C kommt. Erläutern Sie sodann, ob das Laplace-Modell Verwendung findet.

Der Autofahrer will auf dem kürzesten Weg von A nach B. Sind an einem Knoten zwei Wege möglich, so trifft er die Entscheidung mittels einer Laplace-Münze, d. h.
$P(0) = P(1) = 0.5$.
Ist der Fahrer bei C angekommen, so hat er keine Wahlmöglichkeit mehr, um nach B zu kommen, d. h. $P(1) = 1$.
Vgl. Baumdiagramm rechts.

Baumdiagramm



$P(A, C, B) = 0.5^4 \cdot 1^4 = 0.0625$

Laplace-Annahme: alle 70 Wege gleich wahrscheinlich:

$P_{beliebig} := \frac{1}{70} = 0.01429$

Laplace-Annahme ist nicht berechtigt.

Teilaufgabe 2 (7 BE)
Auf einer Landstraße überschreiten durchschnittlich 16% der vorbeifahrenden Autos die Höchst-Geschwindigkeit deutlich. Es wird angenommen, dass die Autofahrer ihre Geschwindigkeit unabhängig voneinander wählen. Nun wird eine Geschwindigkeitsmessung bei 400 Autos durchgeführt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: *Genau 64 Autos überschreiten die Höchstgeschwindigkeit deutlich.*
B: *Mindestens 60 und höchstens 100 Autos fahren deutlich schneller als erlaubt.*

$p := 0.16 \qquad n := 400$

X: Anzahl der zu schnell fahrenden Autos.

1. Möglichkeit: mithilfe der Binomialverteilung (Bernoulli)

$$P(A) = P(X = 64) = B(400, 0.16, 64) = \binom{400}{64} \cdot 0.16^{64} \cdot (0.84)^{336}$$

$$P_{64} := \text{combin}(400, 64) \cdot 0.16^{64} \cdot (0.84)^{336} \qquad P_{64} = 0.05434$$

2. Möglichkeit: mithilfe der Normalverteilung

$$P(A) = P(X = 64) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{64 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\mu := n \cdot p = 64 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 7.332$$

$$P(A) = P(X = 64) = \frac{1}{7.332} \cdot \varphi(0) = \frac{1}{7.332} \cdot 0.39894 = 0.05441$$

$$P(B) = P(60 \le X \le 100) = P(X \le 100) - P(X \le 59) = \Phi\left(\frac{100 - 64 + 0.5}{7.332}\right) - \Phi\left(\frac{59 - 64 + 0.5}{7.332}\right)$$

NR: $\frac{100 - 64 + 0.5}{7.332} = 4.978 \qquad \frac{59 - 64 + 0.5}{7.332} = -0.614$

$$P(B) = \Phi(4.978) - \Phi(-0.614) = \Phi(4.978) - (1 - \Phi(0.614)) = 1 - 1 + 0.72907 = 0.72907$$

Teilaufgabe 3 (9 BE)
Ein Anwohner behauptet, dass mehr als 16 % der Autofahrer deutlich schneller als erlaubt fahren (Gegenhypothese). Entwickeln Sie für 100 Messungen einen Signifikanztest zur Nullhypothese H_0: $p := 0.16$ auf dem 5 % Niveau, und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich von H_0. Erläutern Sie, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht und warum die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art nicht berechenbar ist.

Testgröße: Anzahl der zu schnell fahrenden Autos unter $n := 100$

Nullhypothese H_0: $p_0 \le p \rightarrow p_0 \le 0.16$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.16$

Testart: Rechtsseitiger Signifikanztest

Annahmebereich: $A = \{\ 0, 1, 2, ..., k\}$

Ablehungsbereich: $\overline{A} = \{\ k+1, k+2, ..., 100\ \}$

Signifikanzniveau: $\alpha_S := 0.05$

$\alpha = P(\overline{A}) = P(X > k) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le k) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le k) \ge 0.95$

$\mu := n \cdot p = 16 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 3.666$

$\Phi\left(\dfrac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.95 \qquad \dfrac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \ge 1.645$

Auflösen: $k := 1.645 \cdot \sigma + \mu - 0.5 \qquad k = 21.531$

Aufrunden: $k := 22 \quad \Rightarrow \quad \overline{A} = \{\ 23, 24, ..., 100\ \}$

Der Fehler 2. Art ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 16 % der Autofahrer zu schnell fahren, also $\beta = P(A)$. Man würde die Behauptung der Anwohner zurückweisen, obwohl die Annahme stimmt.
Zur Berechnung fehlt die tatsächliche Wahrscheinlichkeit $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.16$.