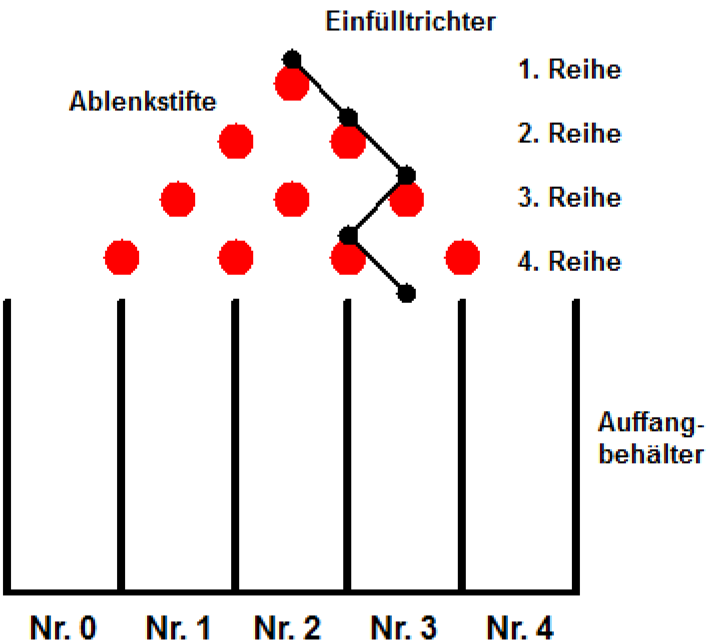
Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1997

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

Aufgabe

Ein vertikales Brett besteht aus vier versetzten Reihen von Ablenkstiften und 5 Auffangbehältern, die von 0 bis 4 nummeriert sind (*Galtonbrett,* siehe Skizze).
Durch den Einfülltrichter fallen Kugeln, die an je einem Ablenkstift jeder Reihe mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder rechts abgelenkt werden und schließlich in einem der fün Auffangbehälter landen. Ein möglicher Weg einer Kugel ist eingezeichnet.



Teilaufgabe 1
Durch den Trichter fällt eine Kugel.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Wege, auf denen die Kugel in Behälter Nr. 1 gelangen kann. Ermitteln Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit für jeden solchen Weg.

Um in den Behälter 1 zu gelangen, muss die Kugel dreimal nach links und einmal nach rechts fallen.
Die Rechtsablenkung kann in der 1., 2., 3. oder 4. Reihe erfolgen.

Es gibt $\binom{4}{1} = 4$ mögliche Wege.

Whrscheinlichkeit für jeden dieser Wege: $p := \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0.0625$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Die Zufallsgröße X gibt die Nummer des Auffangbehälters an, in dem die Kugel landet. Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist, und geben Sie deren Wahrscheinlichkeitsverteilung in Tabellenform an.
[Zur Kontrolle: $P(X = 1) = 0.25$]

Die Wahrscheinlichkeit für eine Ablenkung der Kugel nach oder nach rechts ist in jeder Reihe gleich.

$p_{links} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $p_{rechts} = \frac{1}{2}$

Anzahl der möglichen Wege zu Behälter Nr. k:

$$P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

Das heißt, die Zufallsgröße x ist binomialverteilt.

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = 1 \cdot 0.0625 = 0.0625$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = 4 \cdot 0.0625 = 0.25$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = 6 \cdot 0.0625 = 0.375$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = 1 \cdot 0.0625 = 0.0625$$

Teilaufgabe 2 (3 BE)
Nun lässt man drei Kugeln nacheinander durch den Trichter fallen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel in Behälter Nr. 1 fällt.

3 Kugeln: $\quad n := 3$

Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in den Behälter 1 fällt: $\quad p_1 := 0.25$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{0} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-0} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3} = 1 - 0.422 = 0.578$$

Teilaufgabe 3 (4 BE)
Berechnen Sie, wie viele Kugeln das Galtonbrett unabhängig voneinander mindestens durchfallen müssen, damit in Behälter Nr. 1 mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit mindestens eine Kugel fällt.

$$P(X \geq 1) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) \leq 0.01$$

$$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0.01$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right) \leq \ln(0.01) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 16.008$$

Es müssen mindestens 17 Kugeln das Galtonbrett durchfallen.

Teilaufgabe 4 (9 BE)
Nun durchfallen 80 gleichartige Kugeln unabhängig voneinander das Galtonbrett. Es werden folgende Ereignisse betrachtet:
A: *In den Behälter Nr. 1 fallen genau 15 Kugeln.*
B: *In den Behälter Nr. 1 fallen mindestens 12 und höchstens 17 Kugeln.*

Weisen Sie durch Berechnung und Vegleich entsprechender Wahrscheinlichkeiten nach, dass beide Ereignisse stochastisch abhängig sind.

$n := 80$

1. Möglichkeit: über Bernoulli

$$P(A) = P(X = 15) = \binom{80}{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{65}$$

Nebenrechnungen:

$$\text{combin}(80, 15) = 6.636 \times 10^{15}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{15} = 9.313 \times 10^{-10} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{65} = 7.568 \times 10^{-9}$$

$$P(A) := 6.636 \cdot 10^{15} \cdot 9.313 \cdot 10^{-10} \cdot 7.568 \cdot 10^{-9} \qquad P(A) = 0.04677$$

2. Möglichkeit: über Normalverteilung $\quad \mu := 80 \cdot 0.25 = 20 \quad \sigma := \sqrt{80 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = 3.873$

$$P(A) = P(X = 15) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{15 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{3.873} \cdot \varphi(-1.291) = \frac{1}{3.873} \cdot \varphi(1.291) = \frac{0.1736}{3.873} = 0.0448$$

$$P(B) = P(12 \le x \le 17) = P(X \le 17) - P(X \le 11) = \Phi\left(\frac{17-\mu+0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{11-\mu+0.5}{\sigma}\right)$$

Nebenrechnungen: $\frac{17-\mu+0.5}{\sigma} = -0.645$ $\quad$ $\frac{11-\mu+0.5}{\sigma} = -2.195$

$$P(B) = \Phi(-0.645) - \Phi(-2.195) = 1 - \Phi(0.645) - (1 - \Phi(2.195)) = \Phi(2.195) - \Phi(0.645)$$

$P(B) := 0.98592 - 0.7405$ $\quad$ $P(B) = 0.24542$

$$P(A \cap B) = P(A) = P(X = 15) = 0.0448$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0.0448 \cdot 0.24542 = 0.01099$$

$\Rightarrow$ $\quad P(A \cap B) \ne P(A) \cdot P(B)$ $\quad \Rightarrow$ $\quad$ A und B sind stochastisch abhängig

Teilaufgabe 5 **(6 BE)**
Es wird der Verdacht (H_1) geäußert, dass die Kugeln seltener in die beiden Behälter Nr. 0 und Nr. 1 fallen als erwartet. Zur Überprüfung wird ein Signifikanztest mit 200 Kugeln durchgeführt und die Summe der Kugeln in den Behältern Nr. 0 und Nr. 1 registriert. Erhält man dabei weniger als 50 Kugeln, entscheidet man sich für H_1. Begründen Sie die Nullhypothese H_0: $p := \frac{5}{16}$ und berechnen Sie das Signifikanzniveau dieses Hypothesentests.

Testgröße: Anzahl der Kugeln in Behälter 1 und 2. $\quad n := 200$

Wahrscheinlichkeit: $\quad p := \frac{5}{16}$

H_0: $\quad p_0 \ge p \rightarrow p_0 \ge \frac{5}{16}$

H_1: $\quad p_1 < p \rightarrow p_1 < \frac{5}{16}$

$$P(X = 0 \vee X = 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.0625 + 0.25 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

Linksseitiger Test: $\quad \overline{A} = \{ 0, 1, ..., 49 \}$ $\quad A = \{ 50, 51, ..., 200 \}$

$\mu := n \cdot p = 62.5$ $\quad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 6.555$

Signifikanzniveau:

$$\alpha = P(\overline{A}) = \Phi\left(\frac{49-\mu+0.5}{\sigma}\right) = \Phi(-1.983) = 1 - \Phi(1.983) = 1 - 0.97632 = 0.02368$$