Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1999
Mathematik 13 Technik - A I - Aufgabentext

Aufgabe 1.0

Gegeben ist eine Schar von reellen Funktionen f_a mit $f_a(x) = \dfrac{-x+3}{x^2 - a}$, $x \in D_{f_a}$, $a \in IR$.

Aufgabe 1.1 (5 BE)
Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und die Nullstellen von f_a jeweils in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 1.2 (7 BE)
Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$ und jeweils in Abhängigkeit von a die Art der Definitionslücken von f_a und die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a.

Aufgabe 1.3 (6 BE)

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{1} f_4(x)\,dx$.

Gegeben ist nun die Funktion g mit $g(x) := \arctan\left(\dfrac{-1}{x+3}\right)$ mit der in IR maximalen Definitionsmenge D_g.

Aufgabe 1.4 (5 BE)
Für welchen Wert von a gilt: $g(x) = \arctan\left(f_k(x)\right)$ für $x \neq 3$?
Geben Sie D_g an und ermitteln Sie das Verhalten von $g(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und die Gleichung der Asymptote des Graphen von g.

Aufgabe 1.5 (6 BE)
Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und das Krümmungsverhalten des Graphen von g.
[Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2 + 1}$]

Aufgabe 1.6 (4 BE)
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graph von g in ein kartesisches Koordinatensystem für $-6 \le x \le 2$ $(1 \cdot LE = 1 \cdot cm)$

Aufgabe 1.7.1 (5 BE)
Bestimmen Sie für die Funktion h mit $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } x < -3 \\ a & \text{if } x = -3 \\ g(x) + b & \text{if } x > 3 \end{cases}$

die Parameter a und b so, dass die Funktion h stetig an der Stelle $x_0 = -3$ ist.

Überprüfen Sie, ob h für diese Werte auch an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

[Teilergebnis: $a = 0.5 \cdot \pi$; $b = \pi$;]

Aufgabe 1.7.2 (4 BE)
Zeigen Sie, dass für die Funktion h mit $a = 0.5 \cdot \pi$ und $c = \pi$ gilt:

für $t \in IR^+$.
Was ergibt sich daraus für das Symmetrieverhalten von G_h?

Aufgabe 2 (8 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 + 1} = x^2 - 1$$

mittels der Methode der Variation der Konstanten.

Teilaufgabe 3.0
Ein erhitzter Körper kühlt sich im Laufe der Zeit allmählich auf die konstante Temperatur a (in °C) seiner Umgebung ab. Seine Temperatur y (in °C) wird zu jedem Zeitpunkt t (in Sekunden) durch y(t) beschrieben.

Teilaufgabe 3.1
Bestimmen Sie die allgemeine Gleichung der Abkühlungskurve y(t), wenn für den Abkühlungs-vorgang folgende Differentialgleichung gilt:

$$y'(t) = -b^2 \cdot (y - a)$$

($y'(t) = \frac{dy}{dx}$ ist die Ableitung von y(t) nach der Zeit, der zeitlich konstante Faktor b^2 beschreibt die physikalisch Beschaffenheit des Körpers.)

Teilaufgabe 3.2
Der Körper hat zum Zeitpunkt t = 0 eine Temperatur von 40 (°C), wobei die Umgebungstemperatur 21 (°C) beträgt.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, in dem der Körper auf 35 (°C) abgekühlt ist, für $b^2 = 6.0 \cdot 10^{-3}$ (in s^{-1}).