Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1999
Mathematik 13 Technik - A I - Lösung

made with mathcad

Aufgabe 1.0

Gegeben ist eine Schar von reellen Funktionen f_a mit $f_a(x) = \dfrac{-x+3}{x^2 - a}$, $x \in D_{f_a}$, $a \in IR$.

Aufgabe 1.1 **(5 BE)**

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und die Nullstellen von f_a jeweils in Abhängigkeit von a.

$x^2 - a = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} \end{pmatrix}$

$a > 0 \wedge a \neq 9$ $\qquad D_{f_k} = IR \setminus \{ -\sqrt{a} ; \sqrt{a} \}$

$a = 0$ $\qquad D_{f_k} = IR \setminus \{ 0 \}$

$a < 0$ $\qquad D_{f_k} = IR$

$a = 9$ $\qquad D_{f_k} = IR \setminus \{ -3 \}$

Nullstelle Zähler in Nenner einsetzen: $\quad 3^2 - a = 0$ **auflösen**, $a \rightarrow 9$ $\qquad f_9(x) = \dfrac{-1}{x+3}$

Nullstelle: $\quad a \neq 9 \qquad x_0 = 3$

$a = 9$ $\qquad$ keine Nullstellen

Aufgabe 1.2 **(7 BE)**

Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und jeweils in Abhängigkeit von a die Art der Definitionslücken von f_a und die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x+3}{x^2 - a} \rightarrow 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{-x+3}{x^2 - a} \rightarrow 0$$

Zählergrad < Nennergrad

waagrechte Asymptote $y_0 = 0$

$a > 0 \wedge a \neq 9$	$x = -\sqrt{a}$	$x = \sqrt{a}$	senkrechte Asymptoten mit VZW
$a = 0$	$x = a$		senkrechte Asymptote ohne VZW
$a < 0$	keine Defintionslücken, also keine senkrechten Asymptoten		
$a = 9$	$x = -3$	senkrechte Asymptote mit VZW	
	$x = 3$	stetig behebbare Definitionslücke	

Aufgabe 1.3 **(6 BE)**

Berechnen Sie $\int_{-1}^{1} f_4(x)\,dx$.

$$\int \frac{-x+3}{x^2-4}\,dx = \int \frac{-x+3}{(x+2)\cdot(x-2)}\,dx$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-x+3}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A\cdot(x-2)+B\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{(A+B)\cdot x + 2\cdot B - 2\cdot A}{(x+2)\cdot(x-2)}$$

Koeffizientenvergleich:

(I) $A + B = -1$ (II) $-2\cdot A + 2\cdot B = 3$

$2\cdot(\mathrm{I}) + (\mathrm{II})$ $4\cdot B = 1$ $\Rightarrow$ $B = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $A = \frac{-5}{4}$

$$\frac{-x+3}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{-5}{4}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2}$$

Stammfunktion: $F(x) = \int \left(\frac{-5}{4}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{-5}{4}\cdot\ln(|x+2|) + \frac{1}{4}\cdot\ln(|x-2|) + C$

$$\int_{-1}^{1} f_4(x)\,dx = F(1) - F(-1) = \frac{-5}{4}\cdot\ln(3) + \frac{1}{4}\cdot\ln(1) + \frac{5}{4}\cdot\ln(1) - \frac{1}{4}\cdot\ln(3) = \frac{-3}{2}\cdot\ln(3)$$

Gegeben ist nun die Funktion g mit $g(x) := \arctan\left(\frac{-1}{x+3}\right)$ mit der in IR maximalen Definitionsmenge D_g.

Aufgabe 1.4 (5 BE)
Für welchen Wert von a gilt: $g(x) = \arctan(f_k(x))$ für $x \neq 3$?

Geben Sie D_g an und ermitteln Sie das Verhalten von $g(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und die Gleichung der Asymptote des Graphen von g.

$f_k(x) = \frac{-1}{x+3}$ für $a = 9$ $\quad D_g = IR \setminus \{-3\}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\arctan\left(\frac{-1}{x+3}\right)\right) \to 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\arctan\left(\frac{-1}{x+3}\right)\right) \to 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$\Rightarrow$ waagrechte Asymptote $y_0 = 0$

$$\lim_{x \to -3^-} \left(\arctan\left(\frac{-1}{x+3}\right)\right) \to \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -3^+} \left(\arctan\left(\frac{-1}{x+3}\right)\right) \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\infty \qquad\qquad -\infty$$

$\Rightarrow$ Sprungstelle $x_0 = -3$

Aufgabe 1.5 (6 BE)
Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und das Krümmungsverhalten des Graphen von g.

[Teilergebnis: $g'(x) = \frac{1}{(x+3)^2 + 1}$]

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{-1}{x+3}\right)^2} \cdot (-1) \cdot \frac{-1}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2 + 1}$$

$g'(x) > 0$ für alle $x \in IR$ $\quad$ G_g ist streng mon. steigend in $]-\infty; -3[$ und in $]-3; \infty[$

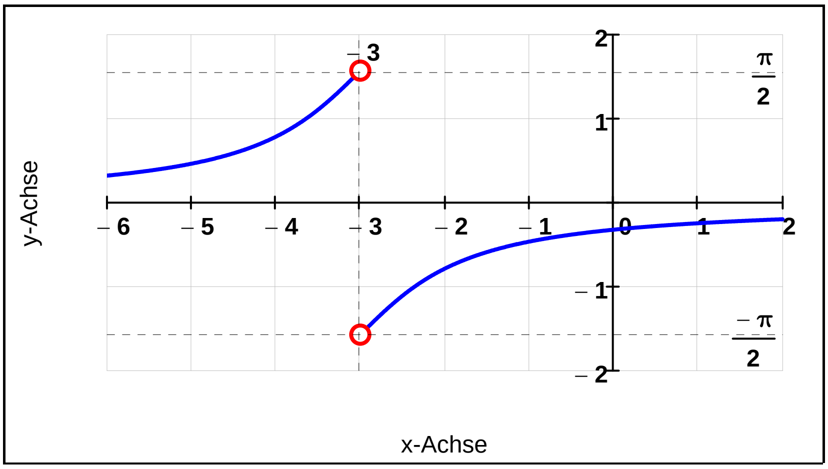
$$g''(x) = \frac{-1}{\left[(x+3)^2+1\right]^2}\cdot 2\cdot(x+3) = \frac{-2\cdot(x+3)}{\left[(x+3)^2+1\right]^2}$$

$$g''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 = 0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow -3$$

Vorzeichenwechsel von g"(x) Plus nach Minus

G_g ist linksgekrümmt in $]-\infty\,;\ -3\,[$ rechtsgekümmt in $]-3\,;\ \infty\,.[$

Aufgabe 1.6 **(4 BE)**
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graph von g in ein kartesisches Koordinatensystem für $-6 \le x \le 2$ $(1\cdot LE = 1\cdot cm)$



Aufgabe 1.7.1 **(5 BE)**
Bestimmen Sie für die Funktion h mit $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } x < -3 \\ a & \text{if } x = -3 \\ g(x) + b & \text{if } x > 3 \end{cases}$

die Parameter a und b so, dass die Funktion h stetig an der Stelle $x_0 = -3$ ist.

Überprüfen Sie, ob h für diese Werte auch an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

[Teilergebnis: $a = 0.5\cdot\pi$; $b = \pi$;]

$$\lim_{x\to -3^-} \arctan\left(\frac{-1}{x+3}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to -3^+} \left(\arctan\left(\frac{-1}{x+3}\right) + b\right) \rightarrow b - \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad b - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad b = \pi$$

$$h'(x) = g'(x) = \frac{1}{(x+3)^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to -3^-} \underbrace{\frac{1}{(x+3)^2 + 1}}_{0} \to 1 \qquad \lim_{x \to -3^+} \underbrace{\frac{1}{(x+3)^2 + 1}}_{0} \to 1$$

$\Rightarrow$ $g(x)$ ist differenzierbar an der Stelle $x_0 = -3$

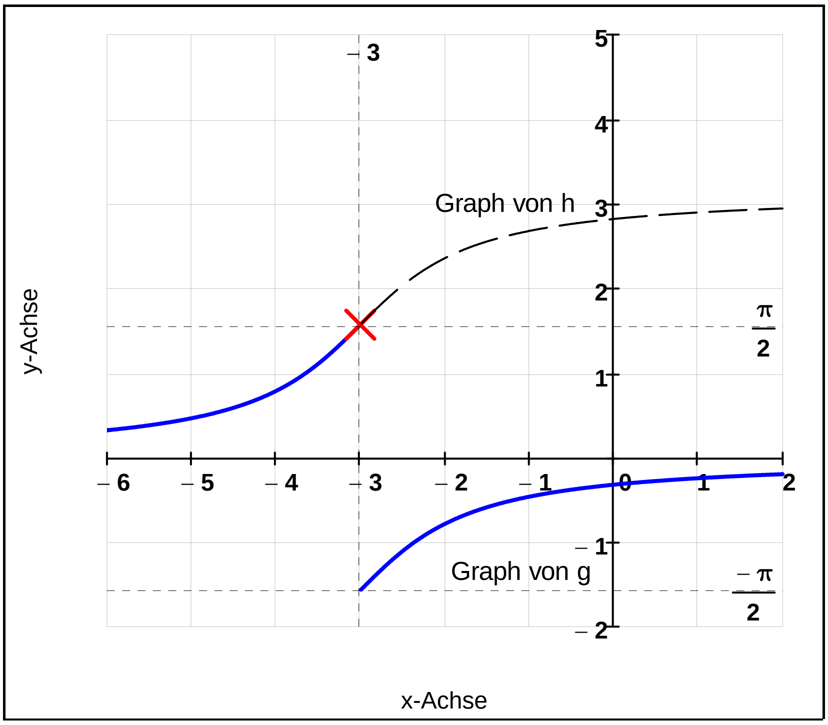
Aufgabe 1.7.2 **(4 BE)**
Zeigen Sie, dass für die Funktion h mit $a = 0.5 \cdot \pi$ und $c = \pi$ gilt:
für $t \in IR^+$.
Was ergibt sich daraus für das Symmetrieverhalten von G_h?

$$\frac{1}{2} \cdot \left[h(-3-t) + h(-3+t) = \frac{1}{2} \cdot (g(-3-t) + g(-3+t) + \pi) \right.$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\arctan\left(\frac{-1}{-3-t+3} \right) + \arctan\left(\frac{-1}{-3+t+3} \right) + \pi \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\arctan\left(\frac{1}{t} \right) + \arctan\left(\frac{-1}{t} \right) + \pi \right)$$

$$\ldots = \frac{1}{2} \cdot \left(\arctan\left(\frac{1}{t} \right) - \arctan\left(\frac{1}{t} \right) + \pi \right) = \frac{\pi}{2}$$

Der Graph von h ist punktsymmetrisch zum Punkt $P\left(-3, \frac{\pi}{2} \right)$.


Graph von h
Graph von g
y-Achse
x-Achse
π
2
− π
2
− 3
5
4
3
2
1
− 1
− 2
− 6
− 5
− 4
− 3
− 2
− 1
0
1
2

Aufgabe 2 (8 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 + 1} = x^2 - 1$$

mittels der Methode der Variation der Konstanten.

Homogene DGL: $y' - \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 + 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 + 1}$

Triviale Lösung: $y = 0$

Trennen der Variablen: $\frac{1}{y} \cdot dy = \frac{2 \cdot x}{x^2 + 1} \cdot dx \qquad$ mit $y \neq 0$

Integration: $\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{2 \cdot x}{x^2 + 1}\, dx + k \rightarrow \ln(|y|) = k + \ln\left(x^2 + 1\right)$

$$|y| = e^{\ln\left(x^2+1\right)+k} = \left(x^2 + 1\right) \cdot e^k = K \cdot \left(x^2 + 1\right)$$

Mit $y > 0, y < 0, y = 0$: $\quad y_h = K \cdot \left(x^2 + 1\right)$

Variation der Konstanten: $y_p = K(x) \cdot \left(x^2 + 1\right)$

Ableitung: $y'_p(x) = K'(x) \cdot \left(x^2 + 1\right) + K(x) \cdot 2 \cdot x$

Einsetzen in $y' - \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 + 1} = x^2 - 1$:

$$K'(x) \cdot \left(x^2 + 1\right) + K(x) \cdot 2 \cdot x - \frac{2 \cdot x}{x^2 + 1} \cdot K \cdot \left(x^2 + 1\right) = x^2 - 1$$

Vereinfachen: $K'(x) \cdot \left(x^2 + 1\right) = x^2 - 1$

$$K'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \qquad\qquad K(x) = \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx$$

Polynomdivision: $\left(x^2 - 1\right) \div \left(x^2 + 1\right) = 1$

$-\left(x^2 + 1\right)$

-2 Rest

$$K(x) = \int \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1}\right) dx = x - 2 \cdot \arctan(x)$$

Spezielle Lösung der homogenen DGL: $y_p = (x - 2 \cdot \arctan(x)) \cdot \left(x^2 + 1\right)$

Allgemeine Lösung: $y_A(x) = (x - 2 \cdot \arctan(x)) \cdot \left(x^2 + 1\right) + K \cdot \left(x^2 + 1\right)$

Teilaufgabe 3.0
Ein erhitzter Körper kühlt sich im Laufe der Zeit allmählich auf die konstante Temperatur a (in °C) seiner Umgebung ab. Seine Temperatur y (in °C) wird zu jedem Zeitpunkt t (in Sekunden) durch y(t) beschrieben.

Teilaufgabe 3.1
Bestimmen Sie die allgemeine Gleichung der Abkühlungskurve y(t), wenn für den Abkühlungsvorgang folgende Differentialgleichung gilt:

$$y'(t) = -b^2 \cdot (y - a)$$

($y'(t) = \frac{dy}{dx}$ ist die Ableitung von y(t) nach der Zeit, der zeitlich konstante Faktor b^2 beschreibt die physikalisch Beschaffenheit des Körpers.)

$$y' = -b^2 \cdot (y - a) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -b^2 \cdot (y - a) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y - a} = -b^2 \cdot dx$$

Integration: $\displaystyle \int \frac{1}{y - a}\, dy = \int -b^2\, dx$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(|y - a|) = -b^2 \cdot t + k$$

Auflösen nach y:

Da $y - a > 0$: $\quad y - a = e^{-b^2 \cdot t + k}$

$$\Leftrightarrow \quad y = a + K \cdot e^{-b^2 \cdot t} \qquad \text{mit } e^k = K \text{, also } K > 0$$

Teilaufgabe 3.2
Der Körper hat zum Zeitpunkt t = 0 eine Temperatur von 40 (°C), wobei die Umgebungstemperatur 21 (°C) beträgt.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, in dem der Körper auf 35 (°C) abgekühlt ist, für $b^2 = 6.0 \cdot 10^{-3}$ (in s^{-1}).

Gegeben: Umgebungstemperatur: $a = 21$ Anfangswert: $t_0 = 0$ $y_0 = 40$

$$y(t, K) := 21 + K \cdot e^{-\left(6.0 \cdot 10^{-3}\right) \cdot t}$$

$$y(0, K) = 40 \rightarrow K + 21 = 40 \text{ auflösen}, K \rightarrow 19 \quad \Rightarrow \quad K = 19$$

Partikuläre Lösung: $\quad y(t, 19) = 19 \cdot e^{-0.006 \cdot t} + 21$

$$y\left(t_0, 19\right) = 35 \rightarrow 19 \cdot e^{-0.006 \cdot t_0} + 21 = 35 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, t_0 \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array}\right. \rightarrow 50.9$$

Nach 51 Sekunden beträgt die Temperatur des Körpers nur noch 35°C.