Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1999
Mathematik 13 Technik - B I - Lösung

made with mathcad

Aufgabe 1 (9 BE)
In einer Klasse mit 25 Schülern wird eine Mathematikaufgabe geschrieben. Sie besteht aus einer Analysisaufgabe und einer Stochastikaufgabe. Erfahrungsgemäß haben 12 Schüler die Analysisaufgabe richtig gelöst, und 8 Schüler haben die Analysisaufgabe richtig gelöst, nicht aber die Stochastikaufgabe. Weiter haben 22 Schüler mindestens eine Aufgabe richtig gelöst. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse, wenn man die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert:
E_1: *Ein zufällig ausgewählter Schüler hat die Analysisaufgabe richtig gelöst.*
E_2: *Ein zufällig ausgewählter Schüler hat höchstens eine Aufgabe richtig gelöst.*
E_3: *Ein Schüer, der die Analysis nicht richtig gelöst hat, hat die Stochastik richtig gelöst.*

A: ein Schüler hat die Analysisaufgabe gelöst.

S: ein Schüler hat die Stochastikaufgabe gelöst.

Gegeben: $P(A) := \frac{12}{25}$ $\qquad P(A) = 0.48$ $\qquad P(A \cap \overline{S}) = \frac{8}{25} = 0.32$

$$P(A \cap \overline{S}) + P(\overline{A} \cap S) + P(A \cap S) = \frac{22}{25} \qquad \Rightarrow \qquad P(\overline{A} \cap \overline{S}) = 1 - \frac{22}{25} = \frac{3}{25} = 0.12$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & A & \overline{A} & \text{Summe} \\ S & \frac{4}{25} & \frac{10}{25} & \frac{14}{25} \\ \overline{S} & \frac{8}{25} & \frac{3}{25} & \frac{11}{25} \\ \text{Summe} & \frac{12}{25} & \frac{13}{25} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(E_1) = \frac{12}{25}$$

$$P(E_2) = 1 - P(A \cap S) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

$$P(E_3) = P_{\overline{A}}(S) = \frac{P(\overline{A} \cap S)}{P_{\overline{A}}} = \frac{\frac{10}{25}}{\frac{13}{25}} = \frac{10}{13}$$

Aufgabe 2.0
Eine Firma stellt Fahrraddynamos her, von denen im Mittel 8,0 % defekt sind.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Einer Tagesproduktion werden zufällig 20 Dynamos entnommem. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon genau 3 defekt sind bzw. dass davon mindestens 2 defekt sind.

Binomialverteilte Zufallsgröße X: Anzahl der defekten Dynamos.

$n := 20 \qquad p := 0.08$ nicht im Tafelwerk

$$P(X = 3) = \binom{20}{3} \cdot 0.08^3 \cdot 0.92^{17} = 1140 \cdot 0.000512 \cdot 0.242 = 0.141$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0.08^0 \cdot 0.92^{20} - \binom{20}{1} \cdot 0.08^1 \cdot 0.92^{19}$$

$$P_2 := 1 - 1 \cdot 0.92^{20} - 20 \cdot 0.08 \cdot 0.92^{19} \qquad P_2 = 0.483$$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Als Ursache für den Defekt eines Dynamos treten unabhängig voneinander entweder ein Fehler in der Mechanik M oder ein Fehler in der Elektrik E oder beide Fehler gleichzeitig auf.
Es gilt $P(M) = 0.025$.
Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ auf drei Dezimalen.

Gegeben:

M: Fehler in der Mechanik $\qquad P_M := 0.025$

E: Fehler in der Elektrik

	M	$\overline{M}$	Summe
E	0.001	0.055	0.056
$\overline{E}$	0.024	0.92	0.944
Summe	0.025	0.975	1

8 % aller Dynamos sind defekt:

$$P(M \cap E) + P(\overline{M} \cap E) + P(M \cap \overline{E}) = 0.08$$

$$\Rightarrow \qquad P(\overline{M} \cap \overline{E}) = 1 - 0.08 = 0.92$$

Da die Ereignisse M und E stochastisch unabhängig sind, sind auch $\overline{M}$ und $\overline{E}$ stochastisch unabhängig.

$$P(\overline{M} \cap \overline{E}) = P(\overline{M}) \cdot P(\overline{E}) \qquad \Rightarrow \qquad P(\overline{E}) = \frac{P(\overline{M} \cap \overline{E})}{P(\overline{M})} = \frac{0.92}{0.975} = 0.944$$

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0.944 = 0.056$$

Teilaufgabe 2.3 **(8 BE)**
Ein Fahrradhändler hat eine Lieferung von 20 Dynamos getestet und dabei festgestellt, dass drei Dynamos defekt sind. Durch ein Versehen wurden jedoch alle 20 Dynamos wieder in eine Schachtel gelegt und können äußerlich nicht voneinander unterschieden werden.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse
A: *Von drei zufällig der Schachtel entnommenen Dynamos sind mindestens zwei intakt* und
B: *Von drei zufällig der Schachtel entnommenen Dynamos ist mindestens einer defekt*
stochastisch unabhängig sind, und berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$.
[Hinweis: Die Entnahme erfolgt nacheinander ohne Zurücklegen.]

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad N := 20 \qquad n := 3 \qquad K := 3 \qquad k = 2 \vee k = 3$$

g: gut d: defekt

Mindestens 2 intakt: $A = \{\ ggd, gdg, dgg, ggg\ \}$

$$P(A) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.358 + 0.596 = 0.954$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{\text{combin}(3,1)\cdot\text{combin}(17,2)}{\text{combin}(20,3)} = 0.358 \qquad \frac{\text{combin}(3,0)\cdot\text{combin}(17,3)}{\text{combin}(20,3)} = 0.596$$

Mindestens einer defekt: $B = \Omega \setminus \{\ ggg\ \}$

$$\frac{\text{combin}(3,0)\cdot\text{combin}(17,3)}{\text{combin}(20,3)} = 0.596 \qquad P(B) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = 1 - 0.596 = 0.404$$

$A \cap B = \{\ ggd, gdg, dgg\ \}$

$$P(A\cap B) = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}} = 0.358 \qquad P(A)\cdot P(B) = 0.956\cdot 0.404 = 0.386$$

$P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B)$ A und B stochastisch abhängig.

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.358}{0.954} = 0.375$$

Teilaufgabe 2.4 (7 BE)
Für seine Produktion benötigt ein Fahrradhersteller 400 funktionierende Dynamos. Berechnen Sie, wie viele Dynamos man bei obiger Firma bestellen muss, damit mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit wenigstens 400 intakte Dynamos zur Verfügung stehen.

Die Anzahl X der intakten Dynamos ist binomialverteilt mit $p := 0.92$.

$$P(X \geq 400) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 399) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 399) \leq 0.05$$

$$\mu(n) := n \cdot p \rightarrow 0.92 \cdot n \qquad \sigma(n) := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \rightarrow \sqrt{0.0736 \cdot n}$$

$$\Phi\left(\frac{399 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{399 - \mu + 0.5}{\sigma} \leq -1.645$$

$$399 - 0.92 \cdot n + 0.5 \leq -1.645 \cdot \sqrt{0.0736} \cdot \sqrt{n}$$

Substitution: $\sqrt{n} = z$

$$1.645 \cdot \sqrt{0.0736} \cdot z - 0.92 \cdot z^2 + 399.5 \leq 0$$

$$1.645 \cdot \sqrt{0.0736} \cdot z - 0.92 \cdot z^2 + 399.5 = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} -20.59727460956261971 \\ 21.08235864531223127 9 \end{pmatrix} \text{keine Lösung}$$

Resubstitution: $n := 21.08^2 = 444.366$

aufrunden: $n = 445$

Teilaufgabe 2.5 (7 BE)
Der Vertriebsleiter der Fahrradfirma behauptet, dass Mountainbikes einen Maktanteil von 60 % haben. Um diese Behauptung bei einem zweiseitigen Hypothesentest der Länge 500 zu testen, wird festgestellt, wie viele der in einem großen Fahrradgeschäft verkauften Räder zum Typ Mountainbike gehören. Geben Sie die Nullhypothese und die Gegenhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5 % an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

Testgröße: Anzahl der verkauften Mountainbikes bei $n := 500$ $\qquad p := 0.6$

Nullhypothese H_0: $\qquad p_0 = p \rightarrow p_0 = 0.6$

Gegenhypothese H_1: $\qquad p_1 \neq p \rightarrow p_1 \neq 0.6$

Testart: Zweiseitiger Signifikanztest

Annahmebereich: $\qquad A = \{ k_1 + 1, k_1 + 2, ..., k_2 \}$

Ablehnungsbereich: $\qquad \overline{A} = \{ 0, 1, ..., k_1 \} \cup \{ k_2 + 1, k_2 + 2, ..., 500 \}$

$\mu := n \cdot p = 300 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 10.954$

$P(X \leq k_1) \leq 0.025 \qquad \Phi\left(\dfrac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.025$

TW: $\qquad \dfrac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma} \leq -1.960 \text{ auflösen}, k_1 \rightarrow -\infty < k_1 \leq 278.02927574579748888$

abrunden: $\qquad k_1 := 278 \qquad \mu - 279 = 21$

Annahmebereich: untere Grenze: $\qquad k_1 + 1 = 279$

obere Grenze: $\qquad k_2 := \mu + 21 = 321$

$A = \{ 279, 280, ..., 321 \}$

Ablehnungsbereich: $\qquad \overline{A} = \{ 0, 1, ..., 278 \} \cup \{ 322, 323, ..., 500 \}$