Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1999
Mathematik 13 Technik - B II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1 (6 BE)
Fridolin installiert die neue Software von Firma Soft. Wegen eines Problems will er die Hotline anrufen, deren Nummer mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % belegt ist. Fridolin nimmt sich vor, spätestens nach vier erfolglosen Versuchen aufzugeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Wählvorgänge, wenn man die Anzahl auf 5 festsetzt für den Fall, dass er viermal nicht durchkommt, und ermitteln Sie den Erwartungswert.

$p_{belegt} := 0.3 \qquad p_{frei} := 0.7$

Beim ersten Anruf erfolgreich: $P(X = 1) = 0.7$

Beim zweiten Anruf erfolgreich: $P(X = 2) = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$

Beim dritten Anruf erfolgreich: $P(X = 3) = 0.3^2 \cdot 0.7 = 0.063$

Beim vierten Anruf erfolgreich: $P(X = 4) = 03^3 \cdot 0.7 = 0.0189$

Beim fünften Anruf erfolgreich: $P(X = 5) = 0.3^4 \cdot 0.7 = 0.0081$

$\mu := 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.21 + 3 \cdot 0.063 + 4 \cdot 0.0189 + 5 \cdot 0.0081 \qquad \mu = 1.425$

Teilaufgabe 2
Ein Fliesenhersteller verpackt die produzierten Fliesen einer Sorte in Pakete zu je 50 Stück. Dabei nimmt er folgende drei Unterscheidungen vor.

"Güteklasse"	"Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Fliese "	"Preis/Paket"
A	0.01	"70 DM"
B	0.10	"65 DM"
C	0.20	"55 DM"

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
E_1: *In einem Paket der Güteklasse C sind mindestens fünf fehlerhafte Fliesen.*
E_2: *Werden in einem Paket der Güteklasse B zehn Fliesen entnommen, so sind darunter nur die letzten beiden fehlerhaft.*

Anzahl x der fehlerhaften Fliesen eines Paketes der Güteklasse C ist binomialverteilt mit $n := 50$, $p_C := 0.2$

$$P(E_1) = P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 4) = 1 - \sum_{i=0}^{4} B(50, 0.2, i) = 1 - 0.01850 = 0.98150$$

Anzahl x der fehlerhaften Fliesen eines Paketes der Güteklasse B ist binomialverteilt mit $n := 50$, $p_B := 0.1$

Bernoulli, aber keine Variationen:

$$P(E_2) = P(g,g,g,g,g,g,g,g,f,f) = 0.9^8 \cdot 0.1^2 = 0.00430$$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Die Zufallsgröße Y bezeichne die Anzahl der fehlerlosen Fliesen in einem Paket der Güteklasse C. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|Y - \mu|) \le 2 \cdot \sigma$, wobei $\mu = E(Y)$ und $\sigma = \sqrt{Var(Y)}$ bedeuten.

fehlerlose Fliesen C: $p_{Co} := 0.8$

$\mu := n \cdot p_{Co} = 40$ $\qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p_{Co} \cdot (1 - p_{Co})} = 2.828$

untere Grenze: $\mu - 2 \cdot \sigma = 34.343$ aufrunden: $Y_u := 35$

obere Grenze: $\mu + 2 \cdot \sigma = 45.657$ abrunden:; $Y_o := 45$

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma \le Y \le \mu + 2 \cdot \sigma) = P(35 \le Y \le 45) = P(45) - P(34) = \blacksquare$$

$$\ldots = \sum_{i=0}^{45} B(50, 0.8, i) - \sum_{i=0}^{34} B(50, 0.8, i) = 0.98150 - 0.03080 = 0.9507$$

Teilaufgabe 2.3 (10 BE)
Bestimmen Sie, wie viele Pakete Fliesen der Güteklasse B mindestens erforderlich sind, um mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens 1000 fehlerfreie Fliesen zur Verfügung zu haben. Untersuchen Sie dann, ob es bei gleicher Bedingung günstiger wäre, Fliesen der Güteklasse A zu kaufen.

Anzahl X der fehlerfreien Fliesen Güteklasse B ist binomialverteilt mit $p_{Bo} := 0.9$, gesucht ist
die Kettenlänge n.

$$P(X \ge 1000) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le 999) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le 999) \le 0.05$$

Binomialverteilung nicht im Tafelwerk, also über die Normalverteilung:

$$\mu = 0.9 \cdot n \qquad \sigma = \sqrt{0.9 \cdot n \cdot 0.1} = \sqrt{0.09 \cdot n} = 0.3 \cdot \sqrt{n}$$

$$\Phi\left(\frac{999 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \le 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{999 - \mu + 0.5}{\sigma} \le -1.645$$

$-1.645 \cdot \sigma - 999 + \mu - 0.5 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -1.645 \cdot 0.3 \cdot \sqrt{n} + 0.9 \cdot n - 999.5 \geq 0$

Substitution: $\sqrt{n} = z$

$0.9 \cdot z^2 - 1.645 \cdot 0.3 \cdot z - 999.5 \geq 0$

$0.9 \cdot z^2 - 1.645 \cdot 0.3 \cdot z - 999.5 = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} -33.051960064723326454 \\ 33.600293398056659787 \end{pmatrix}$ keine Lösung / Lösung

Resubstitution: $\sqrt{n} = 33.6 \qquad n := 33.6^2 = 1129 \qquad DM := 1$

$\dfrac{1129}{50} = 22.58$ Preis der Fliesen in Preisklasse B: $23 \cdot 65 \cdot DM = 1495 \cdot DM$

Anzahl X der fehlerfreien Fliesen Güteklasse A ist binomialverteilt mit $p_{Ao} := 0.99$, gesucht ist die Kettenlänge n.

$P(X \geq 1000) \geq 0.95 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - P(X \leq 999) \geq 0.95 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(X \leq 999) \leq 0.05$

Binomialverteilung nicht im Tafelwerk, also über die Normalverteilung:

$\mu = 0.99 \cdot n \qquad \sigma = \sqrt{0.99 \cdot n \cdot 0.01} = \sqrt{0.0099 \cdot n} = 0.0995 \cdot \sqrt{n}$

$\Phi\left(\dfrac{999 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.05 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{999 - \mu + 0.5}{\sigma} \leq -1.645$

$-1.645 \cdot \sigma - 999 + \mu - 0.5 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -1.645 \cdot 0.0995 \cdot \sqrt{n} + 0.99 \cdot n - 999.5 \geq 0$

Substitution: $\sqrt{n} = z$

$0.99 \cdot z^2 - 1.645 \cdot 0.0995 \cdot z - 999.5 \geq 0$

$0.99 \cdot z^2 - 1.645 \cdot 0.0995 \cdot z - 999.5 = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} -31.691581922450034153 \\ 31.856912730530842234 \end{pmatrix}$ keine Lösung / Lösung

Resubstitution: $\sqrt{n} = 31.85 \qquad n := 31.85^2 = 1014 \qquad DM := 1$

$\dfrac{1014}{50} = 20.28$ Preis der Fliesen in Preisklasse A: $21 \cdot 70 \cdot DM = 1470 \cdot DM$

Es wäre also günstiger, Fliesen der Güteklasse A zu kaufen.

Teilaufgabe 2.4 (5 BE)
Bei einem Paket mit Fliesen fehlt der Aufkleber mit der Angabe der Güteklasse. Durch einen Signifikanztest der Länge 20 soll die Nullhypothese *Es handelt sich um ein Paket der Güteklasse C* auf einem Signifikanzniveau von 4 % getestet werden. Geben Sie hierzu die Gegenhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

X: Anzahl der fehlerhaften Fliesen unter $n := 20$. $\quad p := 0.2$

Hypothese H_0: $\quad p_0 \geq p \rightarrow p_0 \geq 0.2$

Gegenhypothese H_1: $\quad p_1 < p \rightarrow p_1 < 0.2$

Annahmebereich: $\quad A = \{ k + 1, k + 2, ..., 100 \}$

Ablehnungsbereich: $\quad \overline{A} = \{ 0, 1, ..., k \}$

Linksseitiger Test:

$P(X \leq k) \leq 0.04 \qquad$ TW Seite 9: $\quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{A} = \{ 0 \}$

Nur wenn unter 20 getesteten Fliesen keine fehlerhaft ist, kann die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 4 % verworfen werden.

Teilaufgabe 3.0
Die Schokoladenfirma Leicht & Zart produziert unter anderem Nussschokolade.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)
Die Masse der Schokoladetafeln ist als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 100 (g) und einer Standardabweichung von 2,5 (g) anzunehmen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig entnommene Tafel
a) weniger als 97 g,
b) mehr als 104 g wiegt?
[Teilergebnis für b): **p = 5.48%**

$\mu := 100 \qquad \sigma := 2.5$

$$P(X < 97) = \Phi\left(\frac{97-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(-1.2) = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.88493 = 0.11507$$

$$P(X > 104) = 1 - P(X \le 104) = 1 - \Phi\left(\frac{104-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(1.6) = 1 - 0.94520 = 0.0548$$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)
Wie viele Tafeln Nussschokolade muss man testen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60% mindestens eine mit mehr als 104 g findet?

$$P(X \ge 1) \ge 0.6 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) \ge 0.6 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) \le 0.4$$

$$0.0548^0 \cdot (1 - 0.0548)^n \le 0.4 \quad \Leftrightarrow \quad 0.9452^n \le 0.4$$

$$\Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0.9452) \le \ln(0.4)$$

$$n := \frac{\ln(0.4)}{\ln(0.9452)} \qquad n = 16.258$$

aufrunden: $\quad n = 17$

Man muss mindestens 17 Tafeln Schokolade testen.