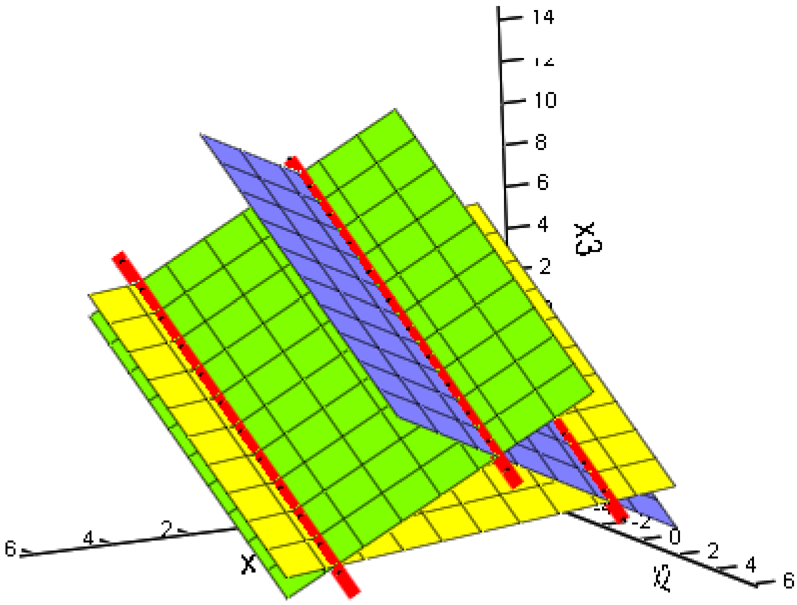
mathphys-online

ANALYTISCHE GEOMETRIE



Inhaltsverzeichnis

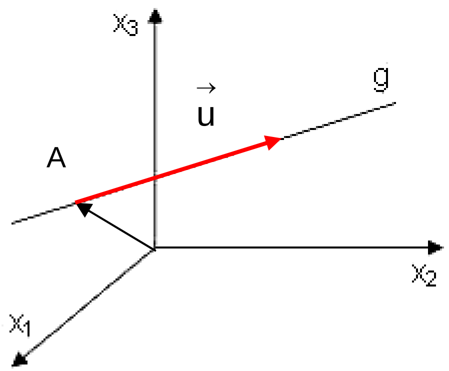
Graphiken erstellt mit Powerpoint

1 Geraden im Raum

1.1 Die vektorielle Parameterform

Bestimmungsstücke:
(1) Aufpunkt $A(a_1 / a_2 / a_3)$ und ein

Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.



$$g:\ \vec{x}_g = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel</u>

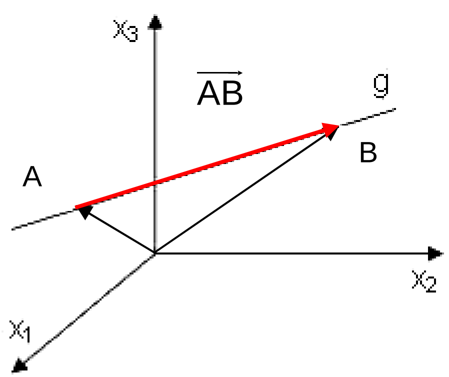
a) $A(-3/5)$; $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad g:\ \vec{x}_g = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A(5/1/0)$; $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\quad g:\ \vec{x}_g = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>Bemerkung</u>

Die Parameterdarstellung von Geraden ist nicht eindeutig, da man als Aufpunkt jeden beliebigen Geradenpunkt und als Richtungsvektor auch jeden beliebigen zu $\vec{u}$ parallelen Vektor verwenden kann.

Bestimmungsstücke:
(2) Zwei Punkte $A(a_1 / a_2 / a_3)$ und $B(b_1 / b_2 / b_3)$



$$g:\ \vec{x}_g = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right)$$

Beispiele

a) $A(0,5/1)$; $B(4/2)$; g: $\vec{x}_g = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A(-2/1/3)$; $B(0/1/5)$; g: $\vec{x}_g = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 1-1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.2 Punkt auf Gerade

Beispiel

Liegen die Punkte $P(-6/-5/5)$ und $Q(14/0/7)$ auf der Geraden $g: \vec{x}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Lösung

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow & -6 = 2 + 4\lambda & \Rightarrow & \lambda = -2 \\ \Rightarrow & -5 = -3 + \lambda & \Rightarrow & \lambda = -2 \\ \Rightarrow & 5 = 1 - 2\lambda & \Rightarrow & \lambda = -2 \end{matrix} \quad \text{also gilt: } P \in g.$$

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow & 14 = 2 + 4\lambda & \Rightarrow & \lambda = -3 \\ \Rightarrow & 0 = -3 + \lambda & \Rightarrow & \lambda = 3 \\ \Rightarrow & 7 = 1 - 2\lambda & \Rightarrow & \lambda = -3 \end{matrix} \quad \text{also gilt: } Q \notin g.$$

1.3 Der allgemeine Geradenpunkt

$$g: \vec{x}_g = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda \cdot u_1 \\ a_2 + \lambda \cdot u_2 \\ a_3 + \lambda \cdot u_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_g\left(a_1 + \lambda \cdot u_1 / a_2 + \lambda \cdot u_2 / a_3 + \lambda \cdot u_3\right)$$

Beispiel

Gesucht ist ein Punkt $P \in g$ mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, welcher 5 LE über der x_1x_2-Ebene liegt.

$$x_3 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \lambda = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 4 \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P\left(10/1/5\right)$$

1.4 Punkteschar

Beispiel
Liegen die Punkte $P_a(3+a/\ 2a/\ 3-a)$ auf einer Geraden?

Lösung:

$\overrightarrow{OP_a} = \begin{pmatrix} 3+a \\ 2a \\ 3-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; Das ist die Gleichung einer Geraden.

1.5 Lage im Koordinatensystem

Gegeben ist eine Gerade $g\colon \vec{x} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad g\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

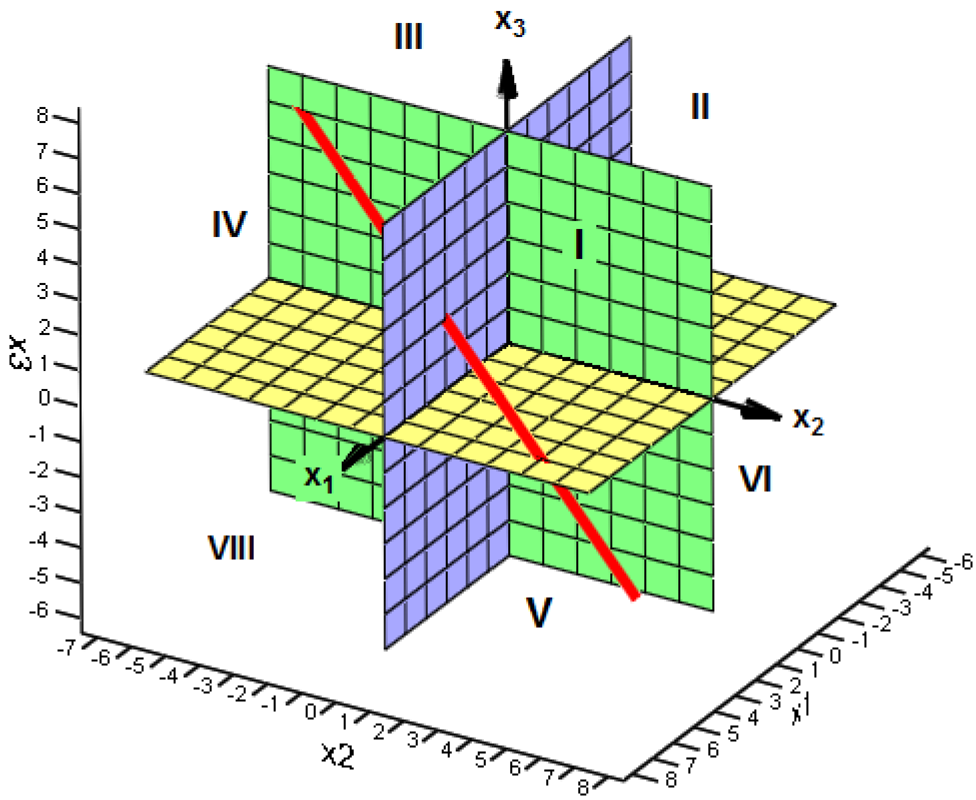
Für das Zeichnen von Geraden im Koordinatensystem ist es gut zu wissen, wo die Gerade die Koordinatenebenen schneidet: Spurpunkte S_i

Gerade $g \cap x_2x_3 - \text{Ebene}: S_1$

Gerade $g \cap x_1x_3 - \text{Ebene}: S_2$

Gerade $g \cap x_1x_2 - \text{Ebene}: S_3$

Lösung
Man setzt die i-te Koordinate im allgemeinen Geradenpunkt gleich Null und berechnet daraus den zugehörigen Parameterwert, der dann in den allgemeinen Geradenpunkt eingesetzt wird.



$$x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + \lambda_1 \cdot u_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{a_1}{u_1} \quad \Rightarrow \quad S_1\left(0 \,/\, a_2 - a_1 \cdot \frac{u_2}{u_1} \,/\, a_3 - a_1 \cdot \frac{u_3}{u_1} \right)$$

$$x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 + \lambda_2 \cdot u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 = -\frac{a_2}{u_2} \quad \Rightarrow \quad S_2\left(a_1 - a_2 \cdot \frac{u_1}{u_2} \,/\, 0 \,/\, a_3 - a_2 \cdot \frac{u_3}{u_2} \right)$$

$$x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_3 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_3 = -\frac{a_3}{u_3} \quad \Rightarrow \quad S_3\left(a_1 - a_3 \cdot \frac{u_1}{u_3} \,/\, a_3 - a_3 \cdot \frac{u_2}{u_3} \,/\, 0 \right)$$

Beispiel

Bestimmung der Spurpunkte von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \lambda_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = -1$$

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_1(0/-6/5)$$

$$x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4 + 2\lambda_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 = 2$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_2(3/0/2)$$

$$x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - \lambda_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_3 = 4$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_3(5/4/0)$$

Spezialfälle

Kommt im Richtungsvektor $\vec{u}$ eine Null vor, so ist die Gerade parallel zu einer Koordinatenebene.

Nur $u_1 = 0$: Gerade ist parallel zur x_2x_3-Ebene.

Nur $u_2 = 0$: Gerade ist parallel zur x_1x_3-Ebene.

Nur $u_3 = 0$: Gerade ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

$u_1 = 0 \wedge u_2 = 0$: Gerade ist parallel zur x_3-Achse,
Gerade ist parallel zur x_2x_3-Ebene und zur x_1x_3-Ebene.

$u_2 = 0 \wedge u_3 = 0$: Gerade ist parallel zur x_1-Achse,
Gerade ist parallel zur x_1x_3-Ebene und zur x_1x_2-Ebene.

$u_1 = 0 \wedge u_3 = 0$: Gerade ist parallel zur x_2-Achse,
Gerade ist parallel zur x_1x_2-Ebene und zur x_2x_3-Ebene.

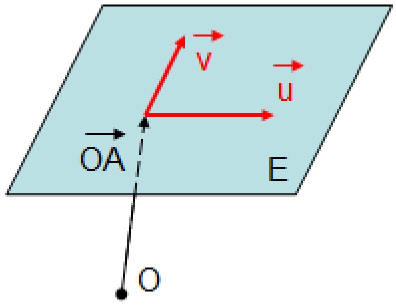
2 Ebenen im Raum

2.1 Aufstellen von Ebenengleichungen in Parameterform

Beispiel 1

Geg.: Punkt $A(a_1 / a_2 / a_3)$ und zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.
Lösung:
Wahl eines Punktes als Aufpunkt.
Wahl zweier linear unabhängiger Verbindungsvektoren als Richtungsvektoren.

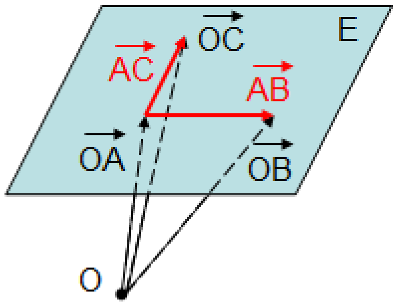
$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$



Beispiel 2

Geg.: Drei Punkte $A(a_1 / a_2 / a_3)$, $B(b_1 / b_2 / b_3)$ und $C(c_1 / c_2 / c_3)$, die nicht auf einer Geraden liegen.
Lösung:
Wahl eines Punktes als Aufpunkt.
Wahl zweier linear unabhängiger Verbindungsvektoren als Richtungsvektoren.

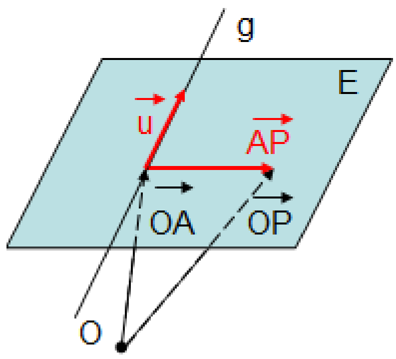
$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$$



Beispiel 3

Geg.: Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$ und ein Punkt $P(p_1 / p_2 / p_3)$ mit $P \notin g$.
Lösung:
Aufpunkt und Richtungsvektor der Geraden g,
Verbindungsvektor $\overrightarrow{AP}$ als zweiter Richtungsvektor.

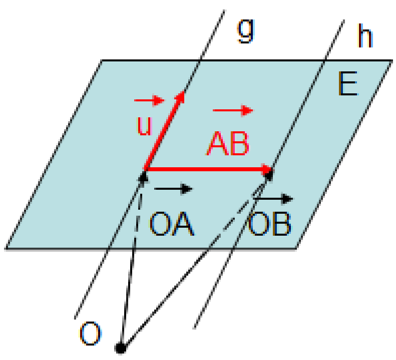
$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \overrightarrow{AP}$$



Beispiel 4

Geg.: Zwei parallele Geraden g und h:
$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$, $h: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{v}$ mit $\vec{v} = \tau \cdot \vec{u}$.
Lösung:
Aufpunkt und Richtungsvektor der Geraden g,
Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ als zweiter Richtungsvektor.

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \overrightarrow{AB}$$



Bemerkung

Die Parameterdarstellung einer Ebene ist nicht eindeutig, die **Richtungsvektoren** der verschiedenen Darstellungen müssen jedoch **komplanar** sein.

Das sieht man normalerweise nicht auf den ersten Blick wie bei den Geraden, sondern man muss nachrechnen:

Beispiele

a) Gesucht: Gleichung der Ebene E_1 durch die Punkte $A(2/3/4)$, $B(7/5/-2)$, $C(-2/0/1)$.

b) Gesucht: Gleichung der Ebene E_2 durch den Punkt $D(3/0/-1)$ und die Richtungen

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Liegt der Punkt $P(5/7/2)$ in der Ebene E_1 bzw. E_2?

d) Gegeben ist die Ebene $E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_3} + \kappa \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}$. Welche Lage hat E_3 bzgl. E_2?

Lösung von a)

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung von b)

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2} + \sigma \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}$$

Lösung von c)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ -6 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[5\cdot(III)+6\cdot(I)]{5\cdot(II)-2\cdot(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & 3 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & -39 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[7\cdot(III)-39\cdot(II)]{} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & 3 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -492 \end{array}\right) \quad \text{also gilt: } P \notin E_1$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot(III)-(I)]{2\cdot(II)+(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[4\cdot(III)-(II)]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{also gilt: } P \in E_2$$

Lösung von d)

Es wird geprüft, ob die Richtungsvektoren der Ebene E_3 linear abhängig sind von den Richtungsvektoren der Ebene E_2.

$\lambda_1 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{u}_3$; $\mu_1 \cdot \vec{u}_2 + \mu_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_3$;

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot(III)-(I)]{2\cdot(II)+(I)} \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[4\cdot(III)-(II)]{} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda_2 = 1$; $\lambda_1 = 1$; $\mu_2 = 1$; $\mu_1 = -1$; die Vektoren sind linear abhängig, also E_2 parallel E_3.

Da $P \in E_2$ der Aufpunkt von E_3 ist, sind E_2 und E_3 identisch.

2.2 Ebene in Normalenform und Koordinatenform

Gegeben ist die ***Parameterform*** der Ebene: $\boxed{\mathbf{E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}}}$

Die Ebene soll in eine parameterfreie Form umgewandelt werden.

Skalar-Multiplikation mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Er steht senkrecht auf der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Ebene E.

$\vec{n} \circ \vec{x} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{n} \circ \vec{u} + \mu \cdot \vec{n} \circ \vec{x}$

Vereinfachung liefert die ***Normalenform*** $\boxed{\mathbf{E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0}}$

Mit der Normierung des Normalenvektors $\vec{n}^{\,0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ folgt die

Hesse'sche Normalenform (HNF): $\vec{n}^{\,0} \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$

Aber nun zur Normalenform in Komponenten: $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0$.

Konkrete Berechnung des Skalarprodukts: $n_1 \cdot (x_1 - a_1) + n_2 \cdot (x_2 - a_2) + n_3 \cdot (x_3 - a_3) = 0$

Umformung: $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 + (-n_1 a_1 - n_2 a_2 - n_3 a_3) = 0$

Vereinfachung liefert die ***Koordinatenform*** $\boxed{\mathbf{E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 + n_0 = 0}}$

<u>Beispiel</u>

Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Normalenform und die Koordinatenform.

Lösung:

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 38 \end{pmatrix}$; Normalenform: E: $\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 38 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

Koordinatenform: E: $-4 \cdot (x_1 - 1) - 5 \cdot (x_2 - 2) + 38 \cdot (x_3 - 3) = 0$

Vereinfachen: E: $-4x_1 - 5x_2 + 38x_3 - 100 = 0$

2.3 Überführung der verschiedenen Darstellungsformen ineinander

2.3.1 Koordinatenform in Normalenform

Gegeben Koordinatenform: $E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 + n_0 = 0$

Ablesen des Normalenvektors: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ zum Punkt A wird berechnet, indem man **zwei Werte** für die Unbekannten x_i und x_j **vorgibt** und dann die **3. berechnet:**

Z. B.: $a_1 = x_1 = 0$; $\quad a_2 = x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = x_3 = -\dfrac{n_0}{n_3} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{n_0}{n_3} \end{pmatrix}$

<u>Beispiel</u>

Gegeben ist die Ebene in Koordinatenform: $E: -4x_1 - 5x_2 + 38x_3 - 100 = 0$
Bestimmen Sie die Normalenform.

Lösung:

Aufpunkt: $A(0/-20/0)$; Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 38 \end{pmatrix}$

Normalenform: $E: \vec{n} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$; Konkret: $E: \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 38 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

2.3.2 Normalenform in Parameterform

Gegeben Normalenform: $E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

Gesucht ist die Parameterform, das heißt, gesucht sind zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ von E. Man weiß jedoch, dass $\vec{u} \perp \vec{n}$ und $\vec{v} \perp \vec{n}$.

Bestimmung zweier Vektoren, die zum Normalenvektor senkrecht sind:
(1) Tauschen zweier Zeilenwerte von $\vec{n}$.
(2) Wechseln eines der Vorzeichen
(3) Die 3. Koordinate gleich Null setzen.

Beispiel

Gegeben ist die Ebene in Normalenform: $E: \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 38 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

Bestimmen Sie die Parameterform von E.

Lösung:

Richtungsvektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 38 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; Konkrete Ebene: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$;

2.3.3 Koordinatenform in Parameterform

Gegeben Koordinatenform: $E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$

Gesucht ist die Parameterform.

Wahl dreier Punkte, z. B. $A\left(0/0/-\frac{n_0}{n_3}\right)$, $B\left(0/-\frac{n_0}{n_2}/0\right)$ und $B\left(-\frac{n_0}{n_1}/0/0\right)$

Bestimmung der Richtungsvektoren jeweils als Verbindungsvektor zweier Punkte.

$E: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$

Beispiel

Gegeben ist die Ebene in Koordinatenform: $E: -4x_1 - 5x_2 + 38x_3 - 100 = 0$

Bestimmen Sie die Parameterform.

Lösung:

1. Punkt: $A\left(0/0/\frac{100}{38}\right)$; 2. Punkt: $B(0/-20/0)$; 3. Punkt: $C(-25/0/0)$;

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -\frac{100}{38} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ 0 \\ -\frac{100}{38} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 38 \\ 5 \end{pmatrix} + \bar{\mu} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.4 Die Koordinatenebenen

2.4.1 Parameterform

x_1x_2-Ebene: $E_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_1x_3-Ebene: $E_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

x_2x_3-Ebene: $E_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.4.2 Koordinatenform

x_1x_2-Ebene: $E_{12}: x_3 = 0$

x_1x_3-Ebene: $E_{13}: x_2 = 0$

x_2x_3-Ebene: $E_{23}: x_1 = 0$

2.5 Die Achsenabschnittsform mit Spurgeraden und Spurdreieck

Bezeichnung

Die Schnittpunkte der Ebene mit einer der Koordinatenachsen heißen Achsenpunkte (Achsenabschnitte) einer Ebene.

$E\colon a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0$

Schnitt mit der x_1-Achse:

$x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$

$a x_1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{d}{a} = s$

Schnitt mit der x_2-Achse:

$x_1 = 0 \wedge x_3 = 0$

$b x_2 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{d}{b} = t$

Schnitt mit der x_3-Achse:

$x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$

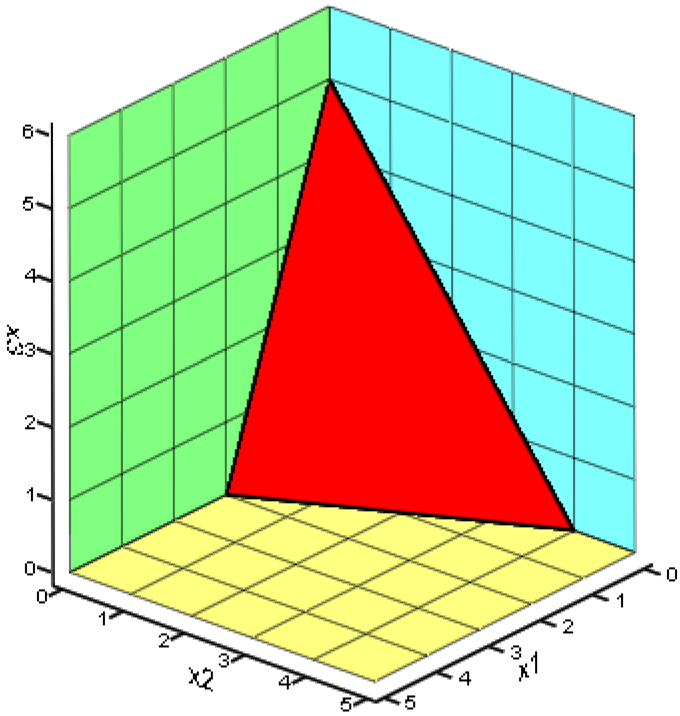
$c x_3 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{d}{c} = u$

Spurpunkte auf den Achsen:

$S(s/0/0)$

$T(0/t/0)$

$U(0/0/u)$



Achsenabschnittsform: $\mathbf{E\colon \frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} + \frac{x_3}{u} = 1}$ vgl. Merkhilfe

Bezeichnung

Die Schnittgeraden der Ebene und der Koordinatenachsen heißen ***Spurgeraden*** der Ebene.

Spurgerade von E in der x_2x_3-Ebene: Gerade g_1 durch die Punkte T und U.

Spurgerade von E in der x_1x_3-Ebene: Gerade g_2 durch die Punkte S und U.

Spurgerade von E in der x_1x_2-Ebene: Gerade g_3 durch die Punkte S und T.

Die Spurgeraden bilden das ***Spurdreieck*** STU.

<u>Beispiel</u>

Gegeben ist die Ebene $E: 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 20 = 0$.

a) Bestimmen Sie die Achsenabschnittsform.

b) Bestimmen Sie die Spurpunkte und die Spurgeraden.

Lösung von a)

Koordinatengleichung: $E: 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 20 \,|\, : 20$

Umformung: $E: \dfrac{10x_1}{20} + \dfrac{5x_2}{20} + \dfrac{4x_3}{20} = 1$

Achsenabschnittsform: $E: \dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{4} + \dfrac{x_3}{5} = 1$

Lösung von b)

Schnitt mit der x_1-Achse: $x_2 = 0 \wedge x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x_1 = 20 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 = s$

Schnitt mit der x_2-Achse: $x_1 = 0 \wedge x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x_2 = 20 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 = t$

Schnitt mit der x_3-Achse: $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x_3 = 20 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5 = u$

Spurpunkte: $S(2/0/0)$; $T(0/4/0)$; $U(0/0/5)$

Spurgerade in der x_2x_3-Ebene: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Spurgerade in der x_1x_3-Ebene: $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

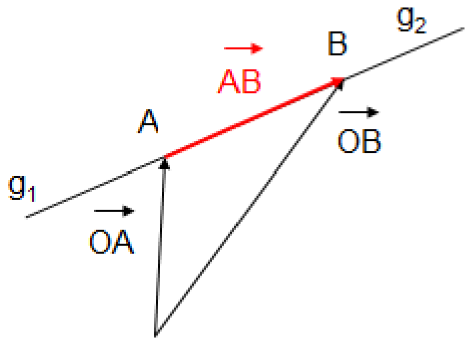
Spurgerade in der x_1x_2-Ebene: $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 Inzidenzen: Lage von Geraden und Ebenen zueinander

3.1 Zwei Geraden

Gegeben sind die Geraden $g_1: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $g_2: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{v}$.

3.1.1 Identische Geraden



Kennzeichen:

$$\boxed{g_1 \equiv g_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \parallel \vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}}$$

kein Schnittwinkel
kein Abstand
unendlich viele Schnittpunkte

Beispiel 1

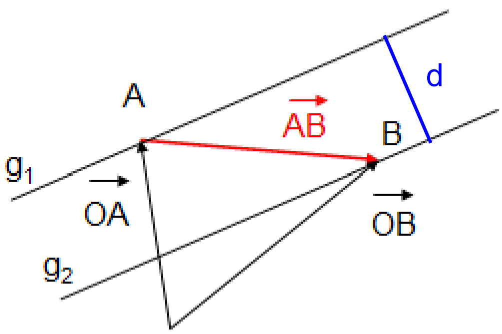
$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren sind parallel: $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{u}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \vec{u} \quad \Rightarrow \quad g_1 \equiv g_2$$

3.1.2 Parallele Geraden



Kennzeichen:

$$\boxed{g_1 \parallel g_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \parallel \vec{v} \nparallel \overrightarrow{AB}}$$

kein Schnittwinkel
Abstand d
keine Schnittpunkte

Beispiel 2

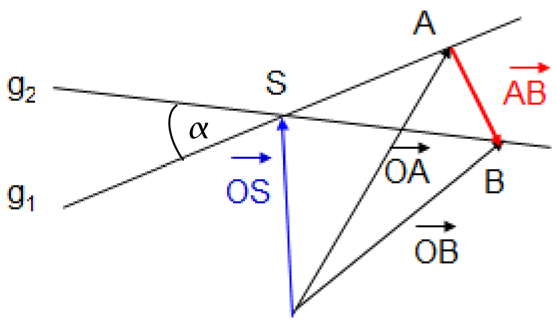
$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren sind parallel: $\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \neq \lambda \cdot \vec{u} \quad \Rightarrow \quad g_1 \parallel g_2$

3.1.3 Sich schneidende Geraden



Kennzeichen:

$$\boxed{\begin{array}{l} g_1 \cap g_2 = \{S(s_1/s_2/s_3)\} \\ \Leftrightarrow \quad \vec{u} \nparallel \vec{v} \wedge \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \circ \overrightarrow{AB} = 0 \end{array}}$$

Schnittwinkel α
kein Abstand
ein Schnittpunkt S

Schnittwinkel (spitzer Winkel): $\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{\left|\vec{u} \circ \vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}\right)}$

Beispiel 3

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren sind nicht parallel, d. h. die Geraden schneiden sich oder sind windschief.

$$g_1 \cap g_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Gaußmatrix für die Komponentengleichungen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & -7 \\ 5 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[7\cdot(III)-4\cdot(I)]{7\cdot(II)-5\cdot(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & -7 \\ 0 & 43 & 0 \\ 0 & -23 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{43\cdot(III)+23\cdot(II)} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

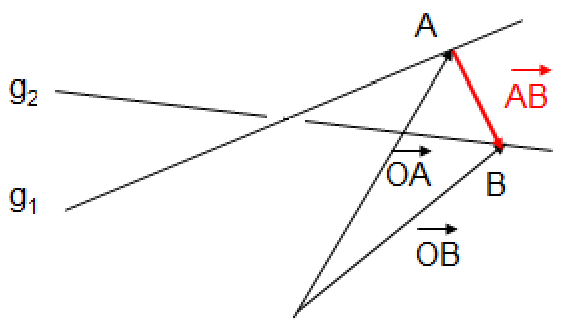
Lösung: $\lambda = -1;\ \mu = 0;$

Schnittpunkt: μ in g_2 einsetzen: $\overline{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(2/-4/-3)$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\left| \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{49+25+16} \cdot \sqrt{9+16+25}} \right) = \arccos\left(\frac{|21-20+20|}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{50}} \right) = \arccos\left(\frac{7\cdot\sqrt{5}}{50} \right) = 71{,}8°$$

3.1.4 Windschiefe Geraden



Kennzeichen:

$$\boxed{\vec{u} \nparallel \vec{v} \wedge \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \circ \overline{AB} \neq 0}$$

kein Schnittwinkel
kein Schnittpunkt

Beispiel 4

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\Rightarrow$ $\vec{u} \neq \lambda \cdot \vec{v}$, d. h. die Richtungsvektoren sind nicht parallel,

Verbindungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 44 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = -224 + 70 = -154,$$

ungleich Null $\Rightarrow$ g_1 und g_2 sind windschief

3.2 Gerade und Ebene

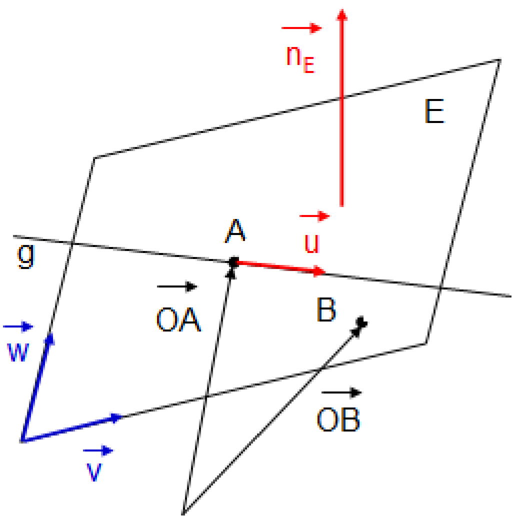
Es gibt 3 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage einer Geraden und einer Ebene.
Die Gerade ist in der Ebene enthalten, parallel zur Ebene oder schneidet die Ebene.
$g \in E,\ g \parallel E,\ g \cap E = \{S(s_1 / s_2 / s_3)\}$

Die **Gerade** <u>muss</u> in **Parameterform** angegeben werden, für die **Ebene** gibt es die Parameterform, die **Normalenform** und die **Koordinatenform.**

Gerade: $g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$ und Ebene $E:\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{v} + \tau \cdot \vec{w}$ bzw. $E:\ \vec{n}_E \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OB}\right) = 0$

bzw. $E:\ a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0$

<u>3.2.1 Die Gerade liegt in der Ebene</u>



E in der Parameterform:

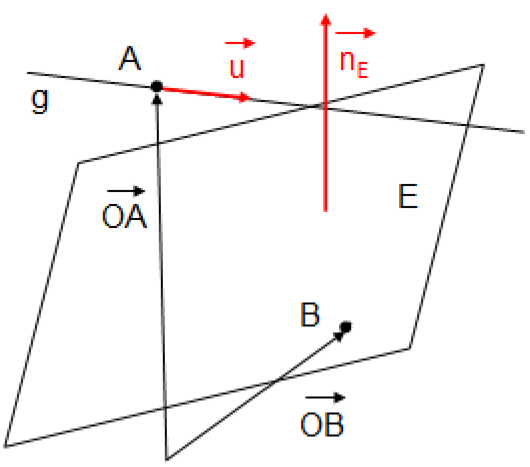
$$\boxed{g \subset E \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{v} \times \vec{w}\right) \circ \vec{u} = 0 \quad \wedge \quad A \in E}$$

E in Normalenform oder Koordinatenform:

$$\boxed{g \subset E \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_E \perp \vec{u} \quad \wedge \quad A \in E}$$

unendlich viele Schnittpunkte
keinen Schnittwinkel
kein Abstand

<u>3.2.1 Die Gerade liegt parallel zur Ebene</u>

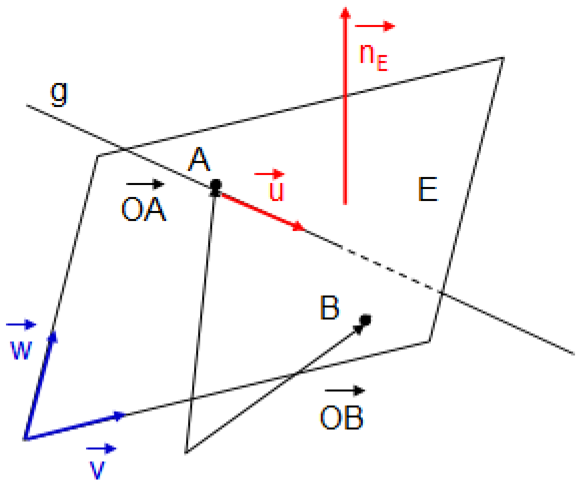


Ebene E in Koordinatenform

$$\boxed{g \parallel E \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{n}_E \quad \wedge \quad A \notin E}$$

kein Schnittpunkt
kein Schnittwinkel
konstanter Abstand d

3.2.3 Die Gerade schneidet die Ebene



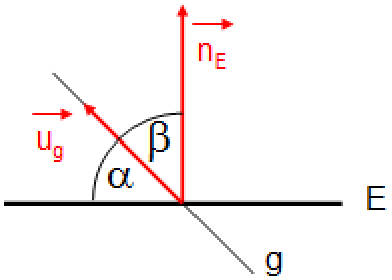
E in Parameterform:

$$g \cap E = \{S(s_1/s_2/s_3)\}$$
$$\Leftrightarrow \det\left(\vec{u}_g; \vec{v}_E; \vec{w}_E\right) \neq 0$$

E in Koordinatenform:

$$g \cap E = \{S(s_1/s_2/s_3)\}$$
$$\Leftrightarrow \vec{u}_g \circ \vec{n}_E \neq 0$$

kein Abstand
Schnittpunkt S
Schnittwinkel α



Schnittwinkel: $\boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{\left|\vec{u}_g \circ \vec{n}_E\right|}{\left|\vec{u}_g\right| \cdot \left|\vec{n}_E\right|}\right)}$

Beispiel 1

Zeigen Sie, dass die Gerade g in Ebene E bzw. Ebene F liegt.

a) Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; Ebene $F: \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 0$?

Lösung von a)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};\ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 + 2 - 8 = 0$$

$\Rightarrow \ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sind linear abhängig.

A in Ebenengleichung E einsetzen: $\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \rho\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$

Gleichungssystem der Koordinatengleichungen lösen:

(1) $-3 = 1 + 2\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = -2$

(2) $-2 = 2\rho \quad \Rightarrow \quad \rho = -1$

(3) $3 = -2 - 1 + 6$ (Probe)

$\Rightarrow \quad A \in E$

Lösung von b)

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = -3 - 1 + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{u} \perp \vec{n}_E$$

A in Ebenengleichung F einsetzen:

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right] = 3\cdot(-3+2) - 1\cdot(-2-1) + 2\cdot(3-3) = -3 + 3 + 0 = 0$$

$\Rightarrow \quad A \in F$

Beispiel 2

Zeigen Sie, dass die Gerade g parallel zur Ebene E bzw. F liegt.

a) Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}6\\7\\-2\end{pmatrix}$; Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

b) Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}6\\7\\-2\end{pmatrix}$; Ebene $F: 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 5 = 0$.

Lösung von a)

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix};\ \vec{u} = \begin{pmatrix}6\\7\\-2\end{pmatrix};\ \vec{n}_E \circ \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}6\\7\\-2\end{pmatrix} = 12 - 14 + 2 = 0$$

Aufpunkt von g in E einsetzen: $\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

Gleichungssystem der Koordinatengleichungen lösen:

(1) $3 = 1+\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$
(2) $-1 = 2+\lambda-\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 5$ $\qquad \Rightarrow \ A \notin E \ \Rightarrow \ g \parallel E$
(3) $5 = 3+2\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 1$ (Widerspruch)

Lösung von b)

Richtungsvektor Gerade: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$; Normalenvektor Ebene F: $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \circ \vec{n_F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 12 - 14 + 2 = 0 \ \Rightarrow \ g \parallel F$$

Aufpunkt von g in F einsetzen: $2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) - 5 + 5 = 8 \neq 0 \ \Rightarrow \ A \notin E \ \Rightarrow \ g \parallel F$

<u>Beispiel 3</u>

Zeigen Sie, dass die Gerade g die Ebene E bzw. F schneidet und bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel.

a) Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; Ebene F: $2x_1 - x_2 - 3x_3 + 5 = 0$

Lösung zu a)

$$g \cap E: \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaußmatrix für die Komponentengleichungen:

$$\begin{array}{ccc} \mu & \sigma & \tau & \\ \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mu & \sigma & \tau & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -7 \\ -3 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(II)+3\cdot(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -28 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

3.Zeile: $\sigma = 3$; 2.Zeile: $\tau = \dfrac{14}{5}$; 1. Zeile: $\mu = -7 + 3\tau = -7 + 3 \cdot \dfrac{14}{5} = \dfrac{7}{5}$

μ in Geradengleichung einsetzen:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{5} \\ \frac{14}{5} \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \text{Schnittpunkt } S\left(\frac{32}{5} / \frac{14}{5} / 3\right)$$

Normalenvektor von E: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+(-3)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+9}} \right) = \arcsin\left(\frac{|-1-9|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} \right) = \arcsin\left(\frac{10}{10} \right) = \arcsin(1) = 90°$$

Lösung von b)

Allgemeinen Geradenpunkt in F einsetzen und nach μ auflösen:

$$2 \cdot (5+\mu) - (7-3\mu) - 3 \cdot 3 + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5\mu - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{5}$$

Einsetzen in Geradengleichung:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{32}{5} \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \text{Schnittpunkt } S\left(\frac{26}{5} / \frac{32}{5} / 3\right)$$

Schnittwinkel:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+(-3)^2} \cdot \sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}} \right) = \arcsin\left(\frac{|2+3|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}} \right) = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{140}} \right) \approx 25°$$

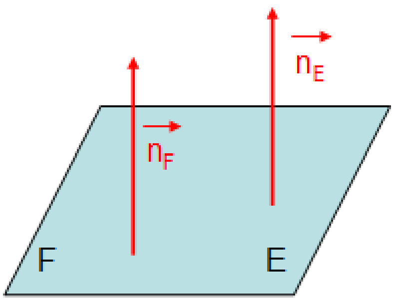
3.3 Zwei Ebenen

Die Lage von zwei Ebenen zueinander wird wegen der Eindeutigkeit der Darstellung meistens über die Koordinatenform untersucht.

Gegeben sind zwei Ebenen E und F in Koordinatenform und jeweils ein Punkt der Ebene:
$E:\ a_E\,x_1 + b_E\,x_2 + c_E\,x_3 + d_E = 0$ und Punkt $A \in E$ bzw.
$F:\ a_F\,x_1 + b_F\,x_2 + c_F\,x_3 + d_F = 0$ und Punkt $B \in F$.

Normalenvektor von E: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a_E \\ b_E \\ c_E \end{pmatrix}$; Normalenvektor von F: $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} a_F \\ b_F \\ c_F \end{pmatrix}$

3.3.1 Identische Ebenen

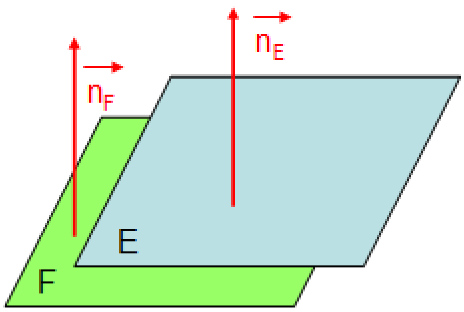


$\boxed{E \equiv F \;\Leftrightarrow\; \vec{n}_E \parallel \vec{n}_F \;\wedge\; A \in F}$ oder

$\boxed{E \equiv F \;\Leftrightarrow\; \vec{n}_E \parallel \vec{n}_F \;\wedge\; B \in E}$

kein Schnittwinkel,
kein Abstand,
unendlich viele Schnittpunkte

3.3.2 Parallele Ebenen

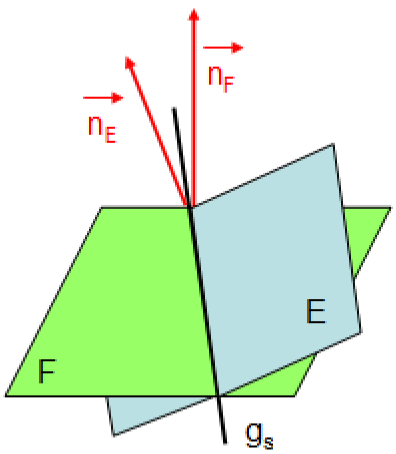


$\boxed{E \parallel F \;\Leftrightarrow\; \vec{n}_E \parallel \vec{n}_F \;\wedge\; A \notin F}$ oder

$\boxed{E \parallel F \;\Leftrightarrow\; \vec{n}_E \parallel \vec{n}_F \;\wedge\; B \notin E}$

kein Schnittwinkel,
keine Schnittpunkte,
konstanter Abstand d

3.3.3 Sich schneidende Ebenen



$E \cap F \neq \{\ \} \;\Leftrightarrow\; \vec{n}_E \nparallel \vec{n}_F$

keinen Abstand,
Schnittgerade g_s

Schnittwinkel $\boxed{\alpha = \arccos\left(\dfrac{\left|\vec{n}_E \circ \vec{n}_F\right|}{\left|\vec{n}_E\right| \cdot \left|\vec{n}_F\right|}\right)}$

Beispiel 1

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\ \text{ und }\ F:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\1,5\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$$

Lösung

$$\vec{n}_E=\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-16\\8\end{pmatrix};\ \vec{n}_F=\begin{pmatrix}-4\\1,5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\16\\-8\end{pmatrix};\quad\Rightarrow\ \vec{n}_E\parallel\vec{n}_F$$

Aufpunkt von E in F einsetzen: $\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\1,5\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$

Koordinatengleichungen:

(1) $4=8-4\lambda \quad\Rightarrow\ \lambda=1$

(2) $5=4+1,5\lambda+2\mu$

(3) $3=4+4\mu \quad\Rightarrow\ \mu=-\frac{1}{4}$

Probe: (2) $5=4+1,5\cdot1+2\left(-\frac{1}{4}\right)=4+1,5-0,5=5$

$\Rightarrow\quad E\equiv F$

Beispiel 2

$E:\ x_1+x_2-2x_3-3=0$ und $F:\ -x_1-x_2+2x_3+1=0$

Lösung

$$\vec{n}_E=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix};\ \vec{n}_F=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix};\quad\Rightarrow\ \vec{n}_E\parallel\vec{n}_F$$

Wahl von $A(x_1/0/0)\in E$: $x_1-3=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=3$

A in F einsetzen: F: $-3+1=-2\neq0 \quad\Rightarrow\quad A\notin F \quad\Rightarrow\quad E\parallel F$

Oder:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&3\\-1&-1&2&-1\end{array}\right)\xrightarrow[(II)+(I)]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&3\\0&0&0&2\end{array}\right)$$

Rangbetrachtung: $Rg(A)=2;\ Rg(A_{erw})=3$

$\Rightarrow$ keine Lösung

Beispiel 3

$E:\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 112 = 0$ und $F:\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 21 = 0$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix};\ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \Rightarrow\quad \vec{n}_E \nparallel \vec{n}_F$$

Ebenen E und F eintragen in eine Gauß-Matrix und diagonalisieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 7 & 112 \\ 1 & 2 & 1 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow[4\cdot(II)-(I)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 7 & 112 \\ 0 & 3 & -3 & -24 \end{array}\right)$$

Rangbetrachtung: $Rg(A) = Rg(A_{erw}) = 2$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen mit einem freien Parameter

Wähle: $x_3 = \lambda$;

2. Zeile: $x_2 = \frac{1}{3}\cdot(-24 + 3\lambda) = -8 + \lambda$;

1. Zeile: $x_1 = \frac{1}{4}\cdot(112 - 5\cdot(-8+\lambda) - 7\lambda) = \frac{1}{4}\cdot(152 - 12\lambda) = 38 - 3\lambda$

Lösung ist eine Schnittgerade: $g_s:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 38-3\lambda \\ -8+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\quad \Rightarrow\quad \vec{n}_E \parallel \vec{n}_F$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix};\ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{16+25+49}\cdot\sqrt{1+4+1}}\right) = \arccos\left(\frac{4+10+7}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{6}}\right) = \arccos(0{,}904) = 25{,}35°}$$

3.4 Drei Ebenen

Gegeben sind drei Ebenen in Koordinatenform:

E: $a_E\,x_1 + b_E\,x_2 + c_E\,x_3 + d_E = 0$;

F: $a_F\,x_1 + b_F\,x_2 + c_F\,x_3 + d_F = 0$

H: $a_H\,x_1 + b_H\,x_2 + c_H\,x_3 + d_H = 0$

Gleichungssystem als Systemmatrix schreiben: $M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_E & b_E & c_E & -d_E \\ a_F & b_F & c_F & -d_F \\ a_H & b_H & c_H & -d_H \end{array}\right)$

Mittels Gauß-Algorithmus in Diagonalform bringen liefert:

Systemmatrix $A_{erw} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$ und Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

- Rangbetrachtung über die Lösbarkeit des Gleichungssystems
- Auflösen aus der Dreiecksform

<u>Beispiele</u>

a) E: $3\,x_1 + 8\,x_2 + 4\,x_3 - 40 = 0$;
F: $x_1 + 6\,x_2 - 3\,x_3 - 20 = 0$;
H: $-x_1 + 2\,x_2 - x_3 + 4 = 0$;

b) E: $3\,x_1 + x_2 - x_3 - 13 = 0$;
F: $-9\,x_1 + 10\,x_2 + 3\,x_3 + 26 = 0$;
H: $6\,x_1 - 5\,x_2 - 2\,x_3 - 19 = 0$;

c) E: $2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 - 2 = 0$;
F: $-4\,x_1 + 6\,x_2 - 2\,x_3 + 4 = 0$;
H: $8\,x_1 - 12\,x_2 + 4\,x_3 - 8 = 0$;

d) E: $3\,x_1 + 22\,x_2 + 2\,x_3 - 65 = 0$;
F: $3\,x_1 - 11x_2 + x_3 - 10 = 0$
H: $-3\,x_1 - 22\,x_2 - 2\,x_3 - 13 = 0$;
;

e) E: $x_1 - x_2 - x_3 + 4 = 0$;
F: $x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$;
H: $x_1 + 5\,x_2 + 5\,x_3 = 0$;

Lösung zu Beispiel a)

$$\begin{array}{llllllll}
\text{(I)} & 3x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & = & 40 \\
\text{(II)} & x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 20 \\
\text{(III)} & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 4 & 40 \\ 1 & 6 & -3 & 20 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot(\text{III})+(\text{I})]{3\cdot(\text{II})-(\text{I})} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 4 & 40 \\ 0 & 10 & -13 & 20 \\ 0 & 14 & 1 & 28 \end{array}\right) \xrightarrow{10\cdot(\text{III})-14\cdot(\text{II})} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 4 & 40 \\ 0 & 10 & -13 & 20 \\ 0 & 0 & 192 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{Rg}(A)=3;\ \text{Rg}(A_{erw})=3;\ \Rightarrow$ genau eine Lösung

3. Zeile: $192x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0;$

2. Zeile: $10x_2 - 13\cdot 0 = 20 \Rightarrow x_2 = 2;$

1. Zeile: $3x_1 + 8\cdot 2 + 4\cdot 0 = 40 \Rightarrow x_1 = 8;$

Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Punkt: $P(8/2/0)$

Lösung zu Beispiel b)

$$\begin{array}{llllllll}
\text{(I)} & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 13 \\
\text{(II)} & -9x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & = & -26 \\
\text{(III)} & 6x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 19
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 13 \\ -9 & 10 & 3 & -26 \\ 6 & -5 & -2 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow[(\text{III})-2\cdot(\text{I})]{(\text{II})+3\cdot(\text{I})} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 13 & 0 & 13 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{13\cdot(\text{III})+7\cdot(\text{II})} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 13 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{Rg}(A)=2;\ \text{Rg}(A_{erw})=2;\ \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen mit einem freien Parameter

2. Zeile: $13x_2 = 13 \Rightarrow x_2 = 1;$

1. Zeile: Wähle $x_3 = \lambda$

1. Zeile: $3x_1 + 1 - \lambda = 13 \Rightarrow x_1 = 4 + \frac{1}{3}\lambda;$

Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4+\frac{1}{3}\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ Schnittgerade: $\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung zu Beispiel c)

$$\begin{array}{llllllll} \text{(I)} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ \text{(II)} & -4x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\ \text{(III)} & 8x_1 & - & 12x_2 & + & 4x_3 & = & 8 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -4 & 6 & -2 & -4 \\ 8 & -12 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)}-4\cdot\text{(I)}]{\text{(II)}+2\cdot\text{(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$Rg(A) = 1;\ Rg(A_{erw}) = 1;\ \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen mit zwei freien Parametern

1. Zeile: Wähle $x_3 = \lambda;\ x_2 = \mu;$

1. Zeile: $2x_1 - 3\mu + \lambda = 2 \ \Rightarrow\ x_1 = 1 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}\mu;$

Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}\mu \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$ Schnittebene: $\vec{x}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung zu Beispiel d)

$$\begin{array}{llllllll} \text{(I)} & 3x_1 & + & 22x_2 & + & 2x_3 & = & 65 \\ \text{(II)} & 3x_1 & - & 11x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ \text{(III)} & -3x_1 & - & 22x_2 & - & 2x_3 & = & 13 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 22 & 2 & 65 \\ 3 & -11 & 1 & 10 \\ -3 & -22 & -2 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)}+\text{(I)}]{\text{(II)}-\text{(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 22 & 2 & 65 \\ 0 & -33 & -1 & -55 \\ 0 & 0 & 0 & 78 \end{array}\right)$$

$Rg(A) = 2;\ Rg(A_{erw}) = 3;\ \Rightarrow$ keine Lösung

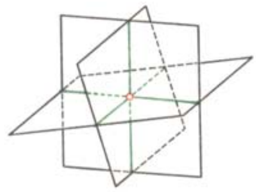
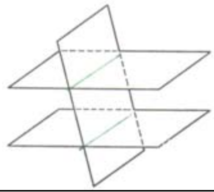
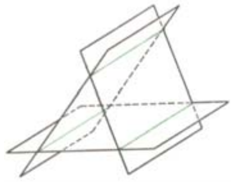
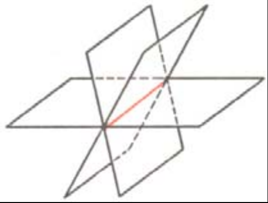
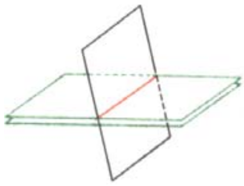
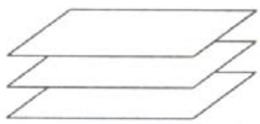
Lösung zu Beispiel e)

$$\begin{array}{llllllll} \text{(I)} & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ \text{(II)} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ \text{(III)} & x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)}-\text{(I)}]{\text{(II)}-\text{(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)}-3\cdot\text{(II)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right)$$

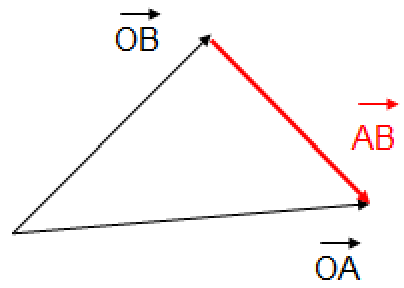
$Rg(A) = 2;\ Rg(A_{erw}) = 3;\ \Rightarrow$ keine Lösung

Zusammenfassung

Systemmatrix	Rg(A)	Rg(B)	Lösung	geometrische Interpretation	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$ $a_{33} \neq 0$	3	3	Genau eine		Punkt
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right)$ $b_3 \neq 0$	2	3	Keine		Zwei parallele Schnittgeraden
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right)$ $b_3 \neq 0$	2	3	keine		Drei parallele Schnittgeraden
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ nicht alle $a_{2k} = 0$	2	2	Einfach unendliche Menge von Lösungen		Genau eine Schnittgerade
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ nicht alle $a_{2k} = 0$	2	2	Einfach unendliche Menge von Lösungen		Genau eine Schnittgerade
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $b_2 \neq 0$	1	2	keine		Drei parallele Ebenen
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $b_2 \neq 0$	1	2	keine		Zwei identische Ebenen und eine parallele Ebene
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ nicht alle $a_{ik} = 0$	1	1	Zweifach unendliche Menge von Lösungen		Eine ganze Ebene

4 Abstandsberechnungen

4.1 Abstand Punkt – Punkt



Gegeben: $A(a_1/a_2/a_3)$; $B(b_1/b_2/b_3)$

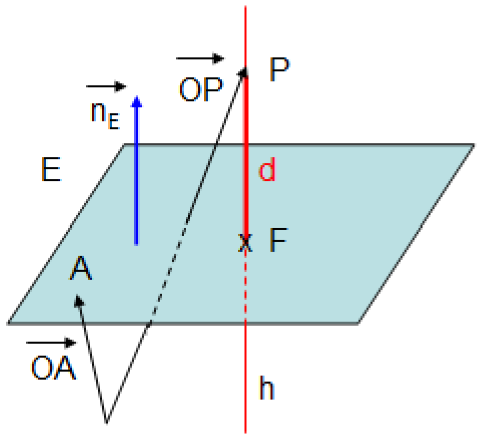
Gesucht: Abstand der Punkte A und B.

Lösung:

Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{d} &= \left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{OB}} - \overrightarrow{\mathbf{OA}}\right| \\ &= \sqrt{(\mathbf{b_1}-\mathbf{a_1})^2 + (\mathbf{b_2}-\mathbf{a_2})^2 + (\mathbf{b_3}-\mathbf{a_3})^2} \end{aligned}}$$

4.2 Abstand Punkt – Ebene



Gegeben:

Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$ und

Ebene $E:\ a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d = 0$.

Gesucht: Abstand Punkt P zur Ebene E.

Lösung:

Aufstellen der **Lotgeraden h** senkrecht zu E.

durch P: $h:\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{n}_E$

Bestimmung des Lotfußpunktes F als Schnittpunkt: $h \cap E = \{F(f_1/f_2/f_2)\}$

Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PF}$: $\boxed{\mathbf{d} = \left|\overrightarrow{\mathbf{PF}}\right|}$

<u>Beispiel</u>

Berechnen Sie den Abstand von $P(0/7/3)$ zur Ebene $E: 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2 = 0$.

Lösung:

Normalenvektor von E: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; Lotgerade h durch P: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$;

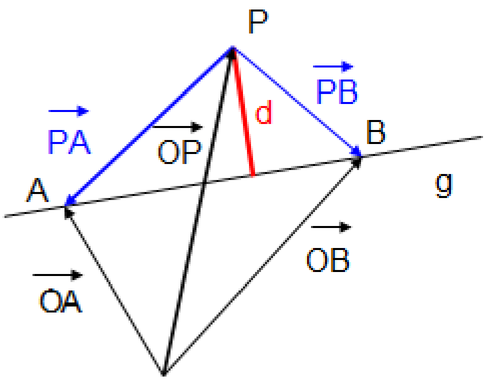
$$E \cap h_1:\ 6\cdot(6\tau) - 2\cdot(7-2\tau) - 3\cdot(3-3\tau) + 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ 49\tau - 21 = 0 \ \Leftrightarrow\ \tau_1 = \frac{3}{7}$$

Lotfußpunkt: $\overrightarrow{OF_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{7}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 18 \\ 43 \\ 15 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ F_1\left(\frac{18}{7}/\frac{43}{7}/\frac{15}{7}\right)$

Verbindungsvektor: $\overrightarrow{PF_1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 18 \\ 43 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{PF_1}\right| = \frac{1}{7}\cdot\sqrt{18^2 + 6^2 + 7^2} \approx 2{,}89$

4.3 Abstand Punkt – Gerade

4.3.1 Methode Dreiecksfläche



Gegeben:

Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$, Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \tau \cdot \vec{u}_g$.

Gesucht: Abstand Punkt P zur Geraden g

Lösung:

(1) Wähle zwei beliebige Punkte $A, B \in g$.

(2) Berechne die Fläche ΔABP auf zwei verschiedene Arten:

$$\left.\begin{array}{l} A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot d \\ A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}\right| \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}\right|$$

$$\boxed{\mathbf{d} = \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{PA}} \times \overrightarrow{\mathbf{PB}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|}}$$

Beispiel

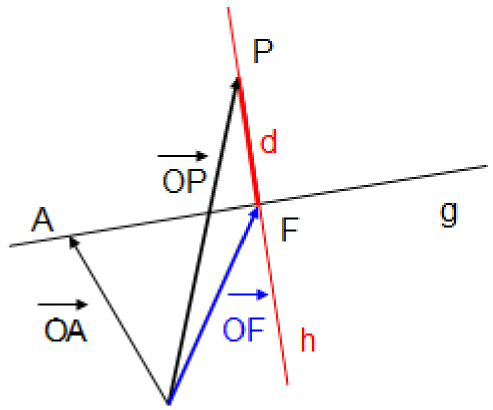
Abstand des Punktes $P(1/4/5)$ von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wahl der Punkte auf der Geraden: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektoren: $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9+9+25}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{43}{2}} \approx 4{,}64$$

4.3.2 Methode Lotgerade



Gegeben:

Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$, Gerade g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \tau \cdot \vec{u}_g$.

Gesucht: Abstand Punkt P zur Geraden g

Lösung:

(1) Fußpunkt F liegt auf der Geraden g:

$$F(f_1/f_2/f_3) \in g: \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \lambda_f \cdot \vec{u}_g$$

(2) Verbindungsvektor $\overrightarrow{PF} \perp$ Richtungsvektor $\vec{u}_g$

$$\overrightarrow{PF} \perp \vec{u}_g \;\Leftrightarrow\; \left(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}\right) \circ \vec{u}_g = 0$$

(1) in (2): $\left(\overrightarrow{OA} + \lambda_f \cdot \vec{u}_g - \overrightarrow{OP}\right) \circ \vec{u}_g = 0$

$\Rightarrow$ λ_f berechnen und einsetzen in (1)

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{OF}$ berechnen $\Rightarrow$ $F(f_1/f_2/f_3)$

$\Rightarrow$ Abstand $\boxed{\mathbf{d} = \left|\overrightarrow{\mathbf{PF}}\right|}$

Beispiel

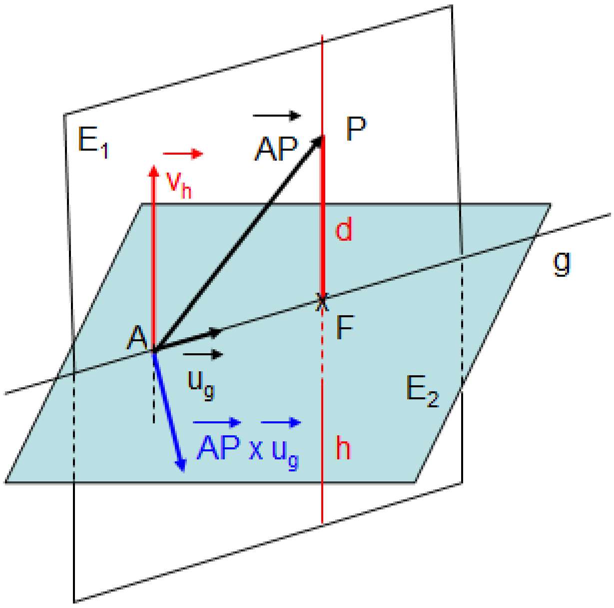
Abstand des Punktes P(1/4/5) von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1) $F \in g: \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 3+\lambda \\ 1+\lambda \\ 2 \end{pmatrix}$; Verbindungsvektor: $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3+\lambda \\ 1+\lambda \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ -3+\lambda \\ -3 \end{pmatrix}$

(2) Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} 2+\lambda \\ -3+\lambda \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2+\lambda-3+\lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\lambda = 1 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{1}{2}$

(2) in (1): $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3+0{,}5 \\ 1+0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -2{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$; $d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}5^2 + 9} = \sqrt{\frac{43}{2}} \approx 4{,}64$

4.3.3 Methode zweifaches Vektorprodukt



Gegeben:
Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$, Gerade

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \tau \cdot \vec{u}_g$.

Gesucht: Abstand Punkt P zur Geraden g
Lösung:

(1) Erstellen einer Hilfsgeraden h durch P, wobei Gerade h **senkrecht** Gerade g:

$h: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \mu \cdot \vec{v}_h$ mit

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_h = \left(\overrightarrow{\mathbf{AP}} \times \vec{\mathbf{u}}_g\right) \times \vec{\mathbf{u}}_g}$$

(2) Berechnung des Fußpunktes F als Schnittpunkt von g und h und Länge des Verbindungsvektors

$\mathbf{d} = \left|\overrightarrow{\mathbf{PF}}\right|$

Beispiel

Abstand des Punktes $P(1/4/5)$ von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1) Verbindungsvektor:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor:

$$\vec{v}_h = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Hilfsgerade: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$

(2) Berechnung des Schnittpunktes $g \cap h$: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$

Gaußmatrix:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(II)-(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[10\cdot(III)-6\cdot(II)]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -2{,}5 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}5^2 + 9} = \sqrt{\frac{43}{2}} \approx 4{,}64$$

5 Besonderheiten

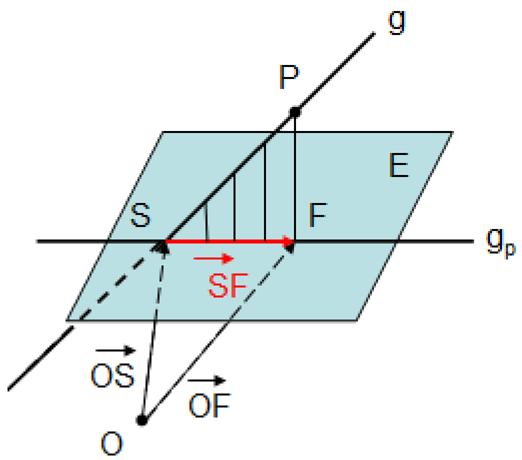
5.1 Die Projektionsgerade

Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g.

$E:\ x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \tau \in IR$$

Bestimmen Sie die Gleichung der ***Projektionsgeraden g_p***
(d. h. die senkrechte Projektion der Geraden g in die Ebene E).



<u>Lösung</u>
Bestimmung des Schnittpunktes der Geraden g und Ebene E: $g \cap E = \{S\}$

$$g \text{ in } E:\ 4 + \tau - 5 - \tau - 1 + 2\tau + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\tau = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S(4/-5/1)$$

Wahl eines beliebigen Punktes P auf g und Bestimmung des zugehörigen Lotfußpunktes:
Sei k=1: $P(5/-10/-1)$

Lotgerade h durch P senkrecht zu E:

$$h:\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{n_E} \quad \Leftrightarrow \quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Schnittpunktes der Geraden h und mit der Ebene E: $h \cap E = \{F(f_1/f_2/f_3)\}$

$$h \text{ in } E:\ 5 + \lambda - 10 + \lambda + 1 + \lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 + 3\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{3} \\ -\frac{28}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F\left(\frac{17}{3} / -\frac{28}{3} / -\frac{5}{3}\right)$$

Gerade durch die Punkte S und F:

$$g_p:\ \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \mu' \cdot \overrightarrow{SF}$$

$$g_p:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu' \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{13}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\mu' \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$g_p:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -8 \end{pmatrix}$$

5.2 Winkel halbieren, geometrischer Ort

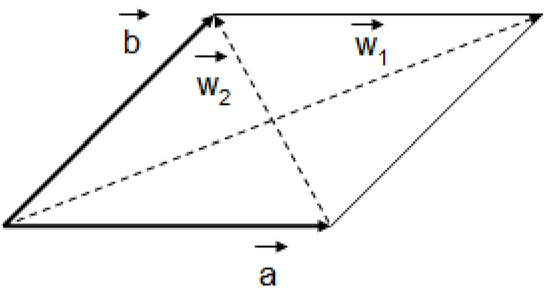
5.2.1 Winkelhalbierende Vektoren

Methode Raute

(Die Raute ist ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind. Die Diagonale ist Symmetrieachse, d. h. sie halbiert den Winkel.)

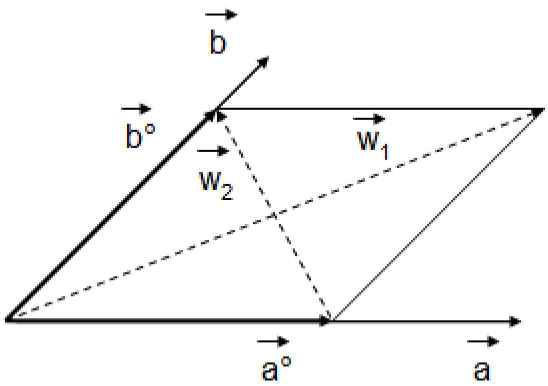
Über die geschlossene Vektorkette:

$\vec{w}_1 = \vec{b} + \vec{a}$ und $\vec{w}_2 = \vec{b} - \vec{a}$



Wenn die beiden Vektoren nicht gleich lang sind, wird über die ***Einheitsvektoren*** (Vektor, dessen Länge 1 beträgt) gearbeitet:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{w}_1 &= \vec{b}^\circ + \vec{a}^\circ \\ \vec{w}_2 &= \vec{b}^\circ - \vec{a}^\circ\end{aligned}}$$

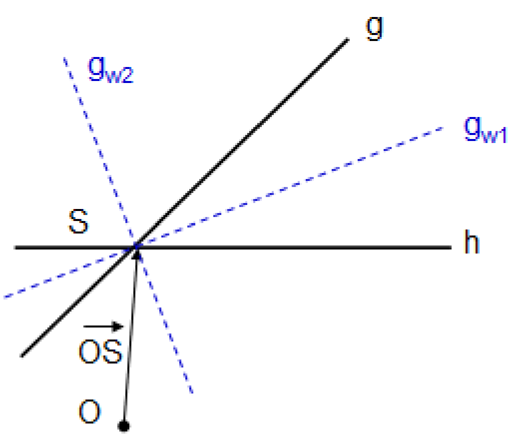


Bemerkung:
Winkelhalbierende Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

5.2.2 Winkelhalbierende Geraden

Gegeben sind die Geraden $g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \lambda \cdot \vec{v}$.

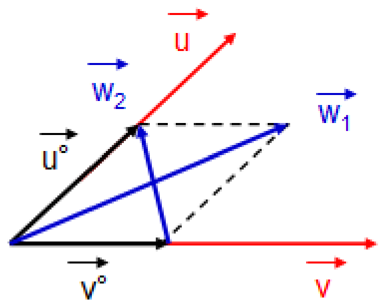
Gesucht sind die Winkelhalbierenden Geraden.



Lösung:

a) Bestimmen der Winkelhalbierenden Vektoren der beiden Richtungsvektoren nach der ***Methode Raute***:

$$\boxed{\overrightarrow{w_{1/2}} = \frac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|} \pm \frac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|} = \vec{u}^\circ \pm \vec{v}^\circ}$$



b) Bestimmen des Schnittpunkts S der Geraden g und h.

c) Die Winkelhalbierenden Geraden haben die Gleichungen

$g_{w1}\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \sigma \cdot \vec{w}_1$ und.

$g_{w2}\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \sigma \cdot \vec{w}_2$

Beispiel

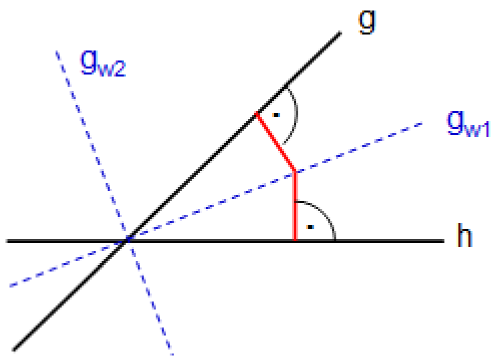
Gegeben sind die Geraden g und h mit

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\9\\16\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ und } h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\7\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte, die von beiden Geraden denselben Abstand haben.

Lösung:

Die Menge aller Punkte mit gleichem Abstand von g und h sind die Winkelhalbierenden Geraden.



Bestimmung des Schnittpunktes:

$$g\cap h:\ \begin{pmatrix}1\\9\\16\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

Lösung über den Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-2\\1&1&-2\\1&5&-14\end{array}\right) \xrightarrow[\text{(III)}-\text{(I)}]{\text{(II)}-\text{(I)}} \left(\begin{array}{cc|c}1&1&-2\\0&0&0\\0&4&-12\end{array}\right) \quad \begin{array}{l}\Rightarrow\ \lambda=1\\ \\ \Rightarrow\ \mu=-3\end{array}$$

Schnittpunkt:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}-1\\7\\2\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\10\\17\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}10\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(10/1/1)$$

Winkelhalbierende Vektoren:

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{27}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{27}}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{27}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix};$$

$$\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{27}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{27}}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{27}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Winkelhalbierende Geraden:

$$g_{W1}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ und } g_{W2}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\1\\1\end{pmatrix} + \rho\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

5.2.2 Winkelhalbierende Ebenen

Gegeben sind die Ebenen E und H mit
$E: a_E\, x_1 + b_E\, x_2 + c_E\, x_3 + d_E = 0$ und $H: a_H\, x_1 + b_H\, x_2 + c_H\, x_3 + d_H = 0$.
Gesucht sind die Winkelhalbierenden Ebenen.

Lösung:

Bestimmen der Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ der Winkelhalbierenden Ebenen, das sind die Winkelhalbierenden Vektoren der Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_H$ (Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind gleich groß).
Bestimmen der Schnittgeraden g_s der Ebenen E und H.

Wahl eines Punktes $P(p_1/p_2/p_3) \in g_s$ als Aufpunkt der Winkelhalbierenden Ebenen.
Winkelhalbierende Ebenen in Normalenform angeben:

$$E_{w1}: \vec{n}_1 \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right] = 0 \text{ und } E_{w2}: \vec{n}_2 \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right] = 0$$

<u>Beispiel</u>
Bestimmen Sie die Winkelhalbierenden Ebenen zu:

$E: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3 = 0$ und $H: 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 8 = 0$

Lösung

Normalenvektoren:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \ \vec{n}_H = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Winkelhalbierende Vektoren:

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \ \vec{w}_2 = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Ebenenschnitt $E \cap H$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(II)}-\text{(I)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Wähle: $x_3 = \lambda$;

$$x_2 = \frac{1}{3}\cdot(-5-\lambda) = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\lambda;$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(-3 - \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\lambda + 2\lambda\right) = -\frac{7}{3} + \frac{5}{6}\lambda;$$

Schnittgerade:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3}+\frac{5}{6}\lambda \\ -\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \iff g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda^* \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix};$$

Wahl eines Aufpunkts $P \in g$: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E_{w1}\colon \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \iff E_{w1}\colon 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 11 = 0$$

$$E_{w2}\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \iff E_{w2}\colon 3x_2 + x_3 + 5 = 0$$

5.3 Spiegelungen

5.3.1 Spiegelpunkt an einer Geraden im IR²

Gegeben sind die Gerade g in Koordinatenform:
$g:\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_0 = 0$ und der Punkt $P(p_1/p_2) \notin g$.

Gesucht: Spiegelpunkt P^*

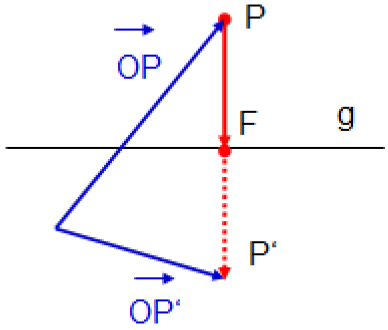
Lösung:

a) Senkrechte Gerade h zu g durch P.

b) Bestimmung des Lotfußpunktes F durch Geradenschnitt g mit h

c) Geschlossene Vektorkette:

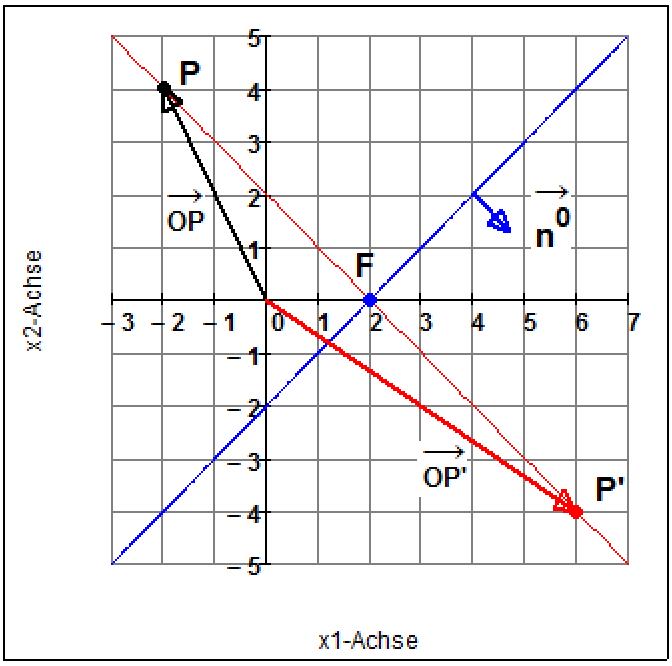
$\overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PF} - \overrightarrow{OP'} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PF}}$



Beispiel

a) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt von $P(-2/4)$ bzgl. der Geraden $g:\ x_1 - x_2 - 2 = 0$ durch Konstruktion.

b) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt durch Rechnung.



Lösung

Normalenvektor der Geraden g: $\vec{n}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hilfsgerade h senkrecht zu g durch P: $h:\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \mu\cdot\vec{n}_g = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\mu \\ 4-\mu \end{pmatrix}$

Bestimmung des Lotfußpunktes F: $g \cap h = \{F(f_1/f_2)\}$

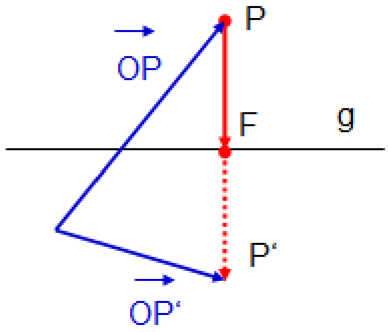
Allgemeinen Geradenpunkt $X(x_1/x_2/x_3)$ von h in Koordinatenform von g (gibt es nur im IR²) einsetzen und nach μ auflösen: $(-2+\mu)-(4-\mu)-2 = 0 \ \Rightarrow\ 2\mu = 8 \ \Rightarrow\ \mu_F = 4$

$\mu_F = 4$ in h einsetzen: $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechnung des Spiegelpunktes P' über die geschlossene Vektorkette:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\left(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}\right) = 2\cdot\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2-(-2) \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ P^*(6/-4)$$

5.3.2 Spiegelpunkt an einer Geraden im IR^3



Gegeben sind die Gerade g in Parameterform:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$ und der Punkt $P(p_1 / p_2 / p_3) \notin g$.

Gesucht: Spiegelpunkt P'

Lösung:

a) Senkrechte Gerade h zu g durch P.

b) Bestimmung des Lotfußpunktes F durch Geradenschnitt g mit h

c) Geschlossene Vektorkette:

$$\overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} - \overrightarrow{OP'} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}}$$

<u>Beispiel</u>

Bestimmen Sie den Spiegelpunkt von $P(2/4/6)$ bezüglich der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) Bestimmung der Hilfsgeraden:

$$\left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}\right) \circ \vec{u}_g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} 1+\tau \\ 1+2\tau \\ 2+\tau \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1+\tau) + (-3+2\tau) \cdot 2 + (-4+\tau) = 0$$

$$6\tau - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{11}{6}$$

Bestimmung des Lotfußpunktes F:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{11}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 28 \\ 23 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F\left(\frac{17}{6} / \frac{14}{3} / \frac{23}{6}\right)$$

Verbindungsvektor: $\overrightarrow{PF} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 28 \\ 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix}$

Berechnung des Spiegelpunktes $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$ über die geschlossene Vektorkette:

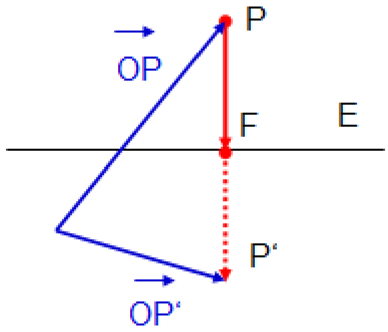
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow P'\left(\frac{1}{3} / \frac{8}{3} / \frac{5}{3}\right)$$

Spiegelunkt: $P'\left(\frac{1}{3} / \frac{8}{3} / \frac{5}{3}\right)$

5.3.3 Spiegelpunkt an einer Ebene im IR^3

Gegeben sind die Ebene E in Koordinatenform
$E: a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d = 0$: und der Punkt
$P(p_1 / p_2 / p_3) \notin E$.
Gesucht: Spiegelpunkt P'
Lösung:
a) Senkrechte Gerade h zu E durch P.
b) Bestimmung des Lotfußpunktes F durch
Schnitt Gerade h mit Ebene E.
c) Geschlossene Vektorkette:

$$\overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} - \overrightarrow{OP'} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}}$$



Beispiel:
Berechne den Spiegelpunkt von $P(-2/7/-5)$ bzgl. der Ebene $E: 3\,x_1 - 4\,x_3 - 24 = 0$
Ergebnis: $P^*(0{,}4/7/-8{,}2)$

Lösung:

Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Hilfsgerade h senkrecht zu E durch P: $h: \ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \mu \cdot \overline{n_E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3\mu \\ 7 \\ -5-4\mu \end{pmatrix}$

Bestimmung des Lotfußpunktes F: $g \cap E = \{F(f_1 / f_2 / f_3)\}$

Allgemeinen Geradenpunkt in die Ebenengleichung einsetzen und nach dem Parameter auf- lösen.

$$3 \cdot (-2 + 3\mu) - 4 \cdot (-5 - 4\mu) - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_F = \frac{2}{5}$$

$\mu_F = \frac{2}{5}$ in h einsetzen: $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -33 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F\left(-\frac{4}{5}/7/-\frac{33}{5}\right)$

Berechnung des Spiegelpunktes P' über die geschlossene Vektorkette:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = 2 \cdot \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ -31 \end{pmatrix} \Rightarrow P'\left(\frac{2}{5} \ / \ 7 \ / \ -\frac{41}{5}\right)$$

Ergebnis: $P'(0{,}4/7/-8{,}2)$