Zusammenfassung Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Begriff	Berechnung
Ortsvektor Vektor mit Anfangspunkt im Koordinaten-ursprung:	$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
Addition zweier Vektoren Die Komponentenwerte der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden einzeln addiert, das Ergebnis ist ein Vektor $\vec{c}$.	$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \vec{c}$
Verbindungsvektor zwischen den Punkten A und B *Spitze Minus Fuß*	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$
Betrag eines Vektors Die Quadrate der Komponentenwerte werden addiert und dann wird die Wurzel gezogen. (Dreidimensionaler Pythagoras)	$\left\lvert \vec{a} \right\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $\left\lvert \overrightarrow{AB} \right\rvert = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$
Einheitsvektor Vektor mit der Länge 1.	$\vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
S- Multiplikation Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar λ: Die Koordinatenwerte des Vektors werden einzeln multipliziert, das Ergebnis ist ein Vektor. Es gilt: $\lambda \cdot \vec{a} \parallel \vec{a}$ (kollineare Vektoren) $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig	$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$
Mittelpunkt einer Strecke [AB]	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \right)$
Schwerpunkt eines Dreiecks ABC	$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \right)$

Zusammenfassung Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Begriff	Berechnung
Skalarprodukt Summe aus dem Produkt der einzelnen Komponentenwerte, das Ergebnis ist eine skalare Größe.	$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ $\vec{a} \circ \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$
Winkel zwischen zwei Vektoren **Anwendung des Skalarproduktes**	$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}\right)$
Senkrechte Vektoren	$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
Winkelhalbierender Vektor Diagonale Vektoren in der Raute, die von $\vec{a}^\circ$ und $\vec{b}^\circ$ aufgespannt wird.	$\vec{w}_1 = \vec{b}^\circ + \vec{a}^\circ$ und $\vec{w}_2 = \vec{b}^\circ - \vec{a}^\circ$
Projektion Vektor $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ Vektor in Richtung von $\vec{a}$ mit Länge der Projektion	$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left(\lvert\vec{a}\rvert\right)^2} \cdot \vec{a}$
Vektorprodukt oder Kreuzprodukt Berechnung bestimmter Unterdeterminanten, das Ergebnis ist ein Vektor. Betrag des Vektorproduktes:	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ $\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$
Fläche eines Parallelogramms Die linear unabhängigen Vektoren Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugen ein Parallelogramm**.**	$F_{\square} = \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$
Fläche eines Dreiecks Die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugen ein Dreieck.	$F_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$

Zusammenfassung Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Begriff	Berechnung
Spatprodukt Die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugen einen Spat. Das Ergebnis ist eine skalare Größe. $P > 0 \iff \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.	$P = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ $= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot c_2$ $+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot c_3$
Determinante $\iff$ Spatprodukt	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ $+(-1)^{2+3} \cdot c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
Volumen eines Spats (Parallelepiped)	$V_{Spat} = \left\| \vec{a} \times \vec{b} \circ \vec{c} \right\|$
Volumen eines Prismas mit Dreieck als Grundfläche	$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \vec{a} \times \vec{b} \circ \vec{c} \right\|$
Volumen einer Pyramide mit Viereck als Grundfläche	$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \left\| \vec{a} \times \vec{b} \circ \vec{c} \right\|$
Volumen einer Pyramide mit Dreieck als Grundfläche	$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6} \cdot \left\| \vec{a} \times \vec{b} \circ \vec{c} \right\|$
Sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig?	$\vec{a} \neq \tau \cdot \vec{b} \iff$ linear unabhängig $\vec{a} = \tau \cdot \vec{b} \iff$ linear abhängig
Sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?	$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} \neq 0 \iff$ linear unabhängig $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = 0 \iff$ linear abhängig

Zusammenfassung Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Begriff	Berechnung
Linearkombination $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c}$	Eintrag der Vektoren in eine Matrix: $\left(\begin{array}{ccc\|c} a_1 & b_1 & c_1 & v_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & v_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & v_3 \end{array}\right)$ Lösen mit Gauß
Stellen drei Vektoren eine Basis des IR^3 dar?	Ja, wenn die Vektoren linear unabhängig sind.
Basis-Dreibein des geometrischen Anschauungsraumes:	$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Lösungen eines linearen (nxn)-Gleichungssystems	Gleichungssystem auf Dreiecksform bringen:
• **genau eine Lösung**	• $Rg(A) = Rg(A_{erw}) = n = 3$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$
• **unendlich viele Lösungen mit einem freien Parameter**	• $Rg(A) = Rg(A_{erw}) = n - 1 = 2$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
• **unendlich viele Lösungen mit zwei freien Parametern**	• $Rg(A) = Rg(A_{erw}) = n - 2 = 1$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
• **keine Lösung**	• $Rg(A) \neq Rg(A_{erw})$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right)$

Zusammenfassung Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Frage	Lösung
Geradengleichungen	
Punkt und Richtung	$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \tau \cdot \vec{u}$
Zwei Punkte A und B	$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \tau \cdot \overrightarrow{AB}$
Ebenengleichungen	
• Parameterform	$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
• Normalenform	$E: \vec{n} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$ mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
• Koordinatenform	$E: a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
Spurpunkte von Geraden	$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$
Schnittpunkt mit der x_2x_3-Ebene:	$x_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 + \lambda \cdot u_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{a_1}{u_1}$
Schnittpunkt mit der x_1x_3-Ebene:	$x_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 + \lambda \cdot u_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{a_2}{u_2}$
Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene:	$x_3 = 0 \Leftrightarrow a_3 + \lambda \cdot u_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = -\frac{a_3}{u_3}$
Lage von Geraden zueinander	
• parallel	• Richtungsvektoren sind linear abhängig und keine gemeinsamen Punkte. $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ mit $\lambda \in IR$ und $A \in g \wedge A \notin h$
• identisch	• Richtungsvektoren sind linear abhängig und der Aufpunkt der einen Geraden liegt in der anderen Geraden. $\vec{u}_g = \lambda \cdot \vec{v}_h$ mit $\lambda \in IR$ und $A \in g \wedge A \in h$
• schneiden sich	• Gleichsetzen und Schnittpunkt bestimmen $\vec{u}_g \neq \lambda \cdot \vec{v}_h$ und $g \cap h \neq \{\ \}$
• windschief	• Nicht parallel und schneiden sich nicht $\vec{u}_g \neq \lambda \cdot \vec{v}_h$ und $g \cap h = \{\ \}$ oder direkter Nachweis: $\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \circ \overrightarrow{AB} \neq 0$

Zusammenfassung Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Frage	Lösung
Besondere Lage von Ebenen	
• parallel zur x_1-Achse	• es fehlt die x_1-Koordinate $E: b x_2 + c x_3 + d = 0$
• parallel zur x_2-Achse	• es fehlt die x_2-Koordinate $E: a x_1 + c x_3 + d = 0$
• parallel zur x_3-Achse	• es fehlt die x_3-Koordinate $E: a x_1 + b x_2 + d = 0$
• parallel zur x_1-Achse und zur x_2-Achse, also • parallel zur x_1x_2-Ebene	• es fehlen die x_1- und die x_2-Koordinate $E: c x_3 + d = 0$
• parallel zur x_1-Achse und zur x_3-Achse, also • parallel zur x_1x_3-Ebene	• es fehlen die x_1- und die x_3-Koordinate $E: b x_2 + d = 0$
• parallel zur x_2-Achse und zur x_3-Achse • parallel zur x_2x_3-Ebene	• es fehlen die x_2- und die x_3-Koordinate $E: a x_1 + d = 0$
Spurpunkte einer Ebene (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen)	$S(s\ /\ 0\ /\ 0)\ ;\ T(0\ /\ t\ /\ 0)\ ;\ U(0\ /\ 0\ /\ u)$
Schnittpunkt mit der x_1-Achse:	$x_2 = 0 \wedge x_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; a x_1 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -\frac{d}{a}$
Schnittpunkt mit der x_2-Achse:	$x_1 = 0 \wedge x_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; b x_2 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 = -\frac{d}{b}$
Schnittpunkt mit der x_3-Achse:	$x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; c x_3 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; x_3 = -\frac{d}{c}$
Achsenabschnittsform	$E: \frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} + \frac{x_3}{u} = 1$

Zusammenfassung Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Frage	Lösung
Winkelberechungen	
zwischen zwei Vektoren	$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert}$ auch stumpfer Winkel möglich
zwischen zwei Geraden	spitzer Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\cos(\varphi) = \frac{\lvert\vec{u} \circ \vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert}$
zwischen zwei Ebenen	spitzer Winkel zwischen den Normalenvektoren $\cos(\varphi) = \frac{\lvert\vec{n}_E \circ \vec{n}_F\rvert}{\lvert\vec{n}_E\rvert \cdot \lvert\vec{n}_F\rvert}$
zwischen Ebene und Gerade	spitzer Winkel β zwischen dem Normalenvektor und dem Richtungsvektor der Geraden wird berechnet, gesucht ist der Gegenwinkel $\alpha = 90° - \beta$, also: $\sin(\alpha) = \frac{\lvert\vec{u}_g \circ \vec{n}_E\rvert}{\lvert\vec{u}_g\rvert \cdot \lvert\vec{n}_E\rvert}$
Schnittpunkt Gerade mit Ebene $g\colon \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ $E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + c = 0$	Allgemeinen Geradenpunkt in Koordinatengleichung der Ebene einsetzen, die entstehende Gleichung nach dem Parameter λ_S auflösen, in Geradengleichung einsetzen: Schnittpunkt $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \lambda_S \cdot \vec{u}$, $S(s_1 / s_2 / s_3)$;
Bestimmung des Lotfußpunktes $L(l_1 / l_2 / l_3)$ eines Punktes $P(p_1 / p_2 / p_3)$ auf eine Gerade g: $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$	Allgemeiner Lotfußpunkt auf der Geraden g: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda \cdot u_1 \\ a_2 + \lambda \cdot u_2 \\ a_3 + \lambda \cdot u_3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda \cdot u_1 \\ a_2 + \lambda \cdot u_2 \\ a_3 + \lambda \cdot u_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PL}$ seht senkrecht auf g $\overrightarrow{PL} \circ \vec{u} = 0 \Rightarrow \lambda = ... \Rightarrow L(l_1 / l_2 / l_3)$
Bestimmung des Lotfußpunktes $L(l_1 / l_2 / l_3)$ eines Punktes $P(p_1 / p_2 / p_3)$ auf eine Ebene E: $E: a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0$	Aufstellen der Lotgeraden h durch P senkrecht E: $h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \tau \cdot \vec{n}_E$ Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Ebene bestimmen.

Zusammenfassung Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Frage	Lösung
Abstand Punkt – Ebene	Lotfußpunkt L berechnen, Abstand = Länge des Verbindungsvektors der Punkte P und L. $d = \left\| \overrightarrow{PL} \right\|$
Abstand Gerade – Ebene • Ebene und Gerade sind parallel zueinander	siehe Abstand Punkt – Ebene (am besten den Aufpunkt verwenden)
Abstand Punkt – Gerade	Über die Dreiecksfläche: Wähle zwei Punkt A und B auf g und berechne $d = \frac{\left\|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PA}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$ Oder: Berechnung des Lotfußpunktes auf g $d = \left\|\overrightarrow{PL}\right\|$
Spiegelpunkte	
Spiegelpunkt P* eines Punktes P zu einer Geraden g.	Berechnung des Lotfußpunktes L $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL}$
Spiegelpunkt P* eines Punktes P zu einer Ebene E.	Berechnung des Lotfußpunktes L $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL}$
Bestimmung der Spiegelgeraden g_s:	Bestimmung des Schnittpunktes S der Geraden mit der Ebene E. Bestimmung des Spiegelpunktes P* eines beliebigen Punktes P auf der Geraden. $g_s : \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \tau \cdot \overrightarrow{P^*S}$
Projektion einer Geraden g in eine Ebene E:	Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E bestimmen, Lotfußpunkt L eines Geradenpunktes bestimmen: Projektionsgerade $g_p : \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \tau \cdot \overrightarrow{LS}$
Schnittgerade zweier Ebenen	
• Beide Ebenen in Koordinatenform gegeben	Beide Ebenen in ein Gaußsystem eintragen, eine Nullzeile hinzufügen und lösen.
• Eine Ebene in Koordinatenform, eine Ebene in Parameterform	Die Ebenen in einander einsetzen, ein Parameter in Abhängigkeit des anderen ausdrücken und in die Ebene in Parameterform einsetzen, zusammenfassen, Geradengleichung.