Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 12 Nichttechnik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) := \frac{-1}{4}\cdot\left(x^3 - 4\cdot x^2 - 2\cdot x + 8\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

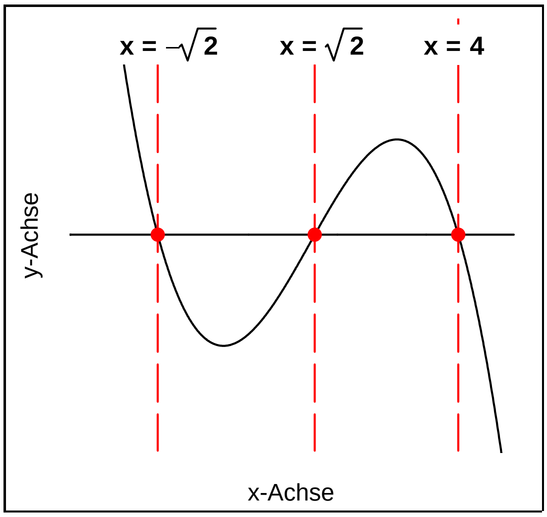
Teilaufgabe 1.1 **(7 BE)**

Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f und deren Vielfachheit. Begründen Sie dann ohne weitere Rechnung, dass in den Intervallen $]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}[$ sowie $]\sqrt{2}\,;\,4[$ jeweils eine Extremstelle liegt. Geben Sie auch deren Art an.

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4\cdot x^2 - 2\cdot x + 8 = 0$

$f(4) = 64 - 4\cdot 16 - 2\cdot 4 + 8 = 0$

$$\begin{array}{l} \left(x^3 - 4\cdot x^2 - 2\cdot x + 8\right) \div (x - 4) = x^2 - 2 \\ -\left(x^3 - 4\cdot x^2\right) \\ \hline \qquad\qquad -2\cdot x + 8 \\ \qquad\qquad -(-2\cdot x + 8) \\ \hline \qquad\qquad - \quad - \end{array}$$



$x^2 - 2 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

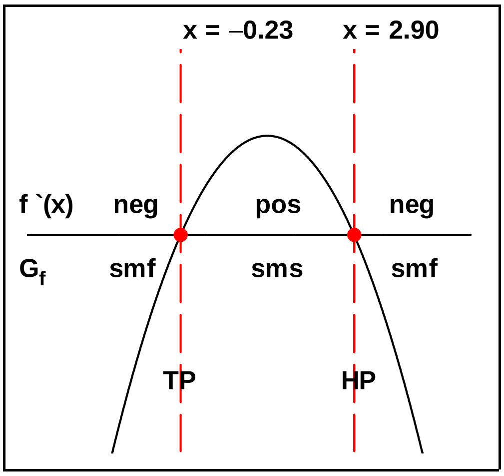
einfache Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{2}$ $\quad x_2 = \sqrt{2}$ $\quad x_3 = 4$

Negativer Leitkoeffizient: Im ersten Intervall ein Tiefpunkt, im zweiten Intervall ein Hochpunkt.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Berechnen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

$$f'(x) := \frac{-1}{4}\cdot\left(3\cdot x^2 - 8\cdot x - 2\right)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot x^2 - 8\cdot x - 2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{22}}{3} + \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{22}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.90 \\ -0.23 \end{pmatrix}$$



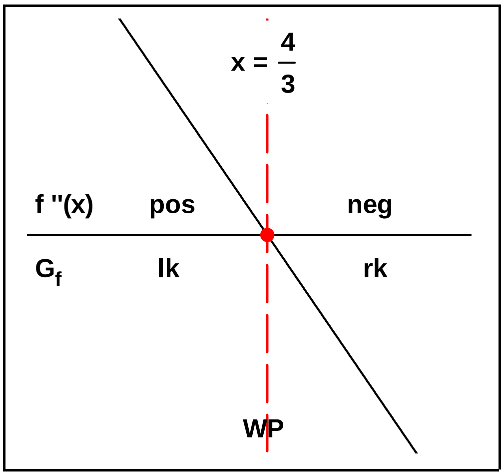
$f(-0.23) = -2.06$ $\quad$ $TP(-0.23, -2.06)$

$f(2.90) = 1.76$ $\quad$ $HP(2.90, 1.76)$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph G_f rechts- bzw. linksgekrümmt ist, sowie die Koordinaten des Wendepunkts.

$$f''(x) := \frac{-1}{4}\cdot(6\cdot x - 8)$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\cdot x - 8 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{4}{3}$$



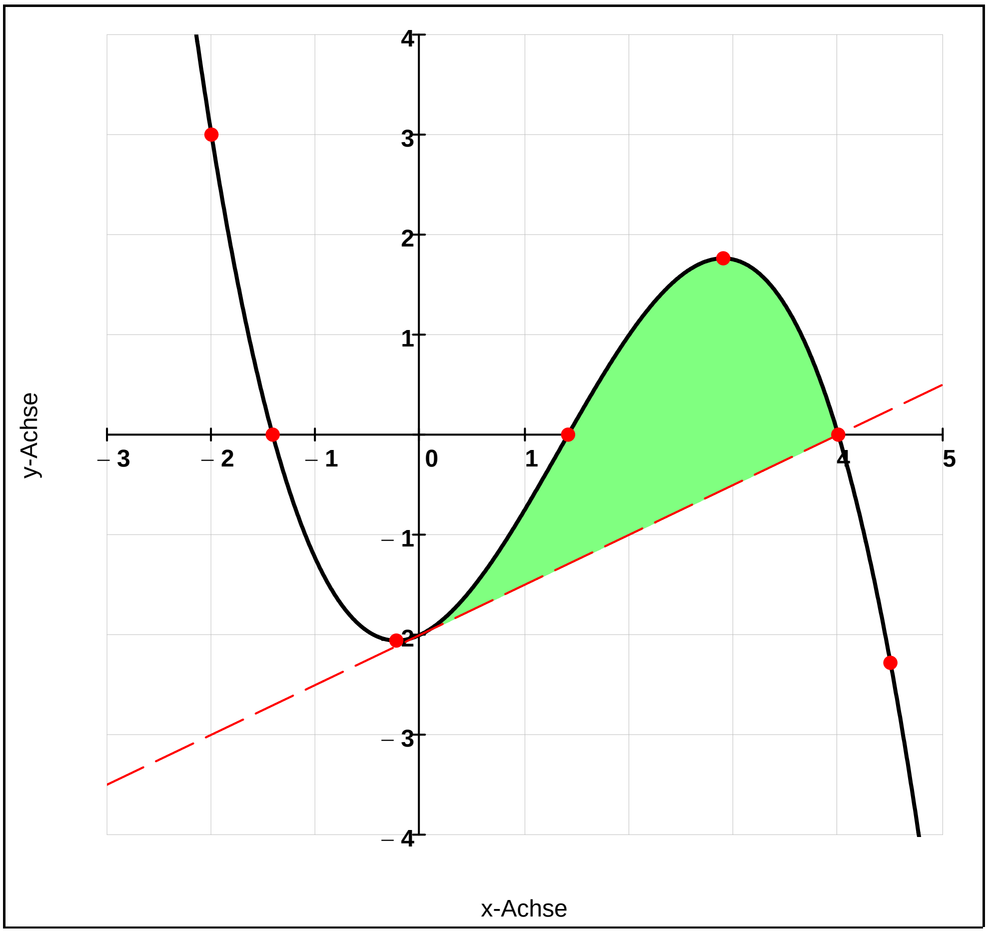
$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -0.148$$

$WP(1.33, -0.15)$

G_f ist linksgekrümmt in $\left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$ und

G_f ist redhtsgekrümmt in $\left[\frac{4}{3}; \infty\right[$.

Teilaufgabe 1.4 **(4 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-2 \leq x \leq 4.5$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem.



Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Die Gerade G_t enthält die Schnittpunkte des Graphen mit der y-Achse und mit der x-Achse bei $x = 4$. Zeigen Sie, dass die Gerade G_t Tangente an G_f ist und zeichnen Sie G_t in das vorhandene Koordinatensystem ein.

$f(0) = -2$

Steigung der Tangente: $m_t := \frac{0-(-2)}{4-0} = \frac{1}{2}$

Steigung von G_f im Punkt (0/-2): $f'(0) = 0.5$

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Die Graphen G_f und G_t schließen ein endliches Flächenstück ein.
Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Flächenstück: $A = \int_0^4 (f(x) - t(x))\, dx$

Gleichung der Tangente: $t(x) := m_t \cdot (x-4) = \frac{x}{2} - 2$

Stammfunktion: $F(x) := \int \left[\frac{-1}{4} \cdot \left(x^3 - 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 8\right) - \left(\frac{x}{2} - 2\right)\right] dx$

$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16}$

Nebnerechnungen: $F(4) = \frac{16}{3}$ $\quad F(0) = 0$

Flächenmaßzahl: $A := F(4) - F(0) = \frac{16}{3}$

Teilaufgabe 1.7 (4 BE)

Gegeben ist zusätzlich die Funktion p mit $D_p = IR$ und es gilt: $f(x) - p(x) = \frac{-1}{4} \cdot \left(x^3 - 5 \cdot x^2\right)$.

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f - p$ mit deren Vielfachheiten und erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieser Stellen für die Graphen der beiden Funktionen.

Differenzfunktion: $d(x) = f(x) - p(x)$

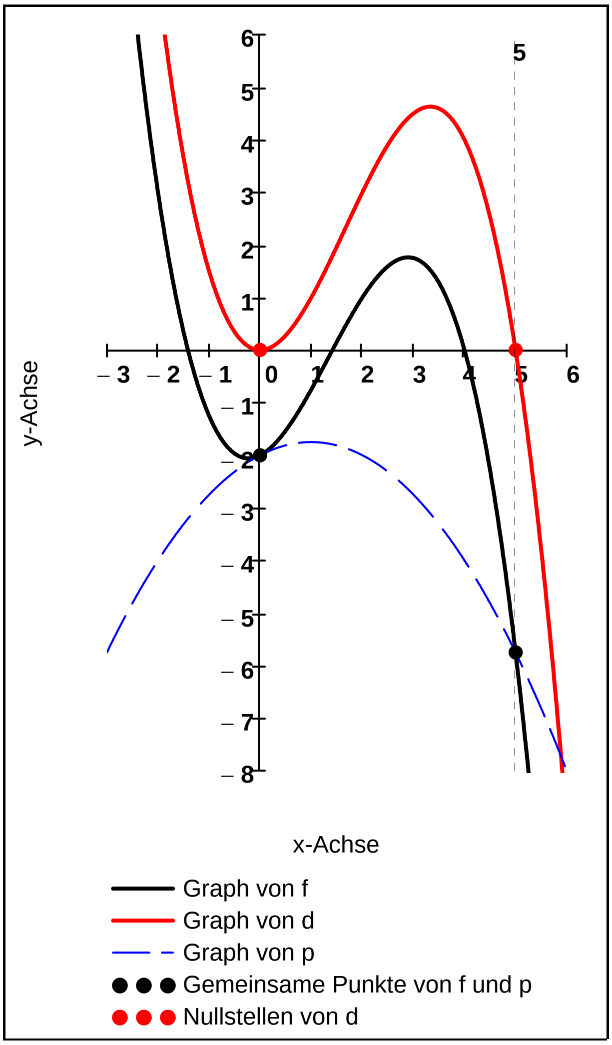
$d(x) := \frac{-1}{4} \cdot \left(x^3 - 5 \cdot x^2\right)$ $\qquad d(x) = -\frac{x^2 \cdot (x-5)}{4}$

Nullstellen: $\quad \mathbf{d(x) = 0 \rightarrow \frac{5 \cdot x^2}{4} - \frac{x^3}{4} = 0 \text{ auflösen } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}$

$\mathbf{x = 0}$ doppelte Nullstelle $\Rightarrow$ Berührpunkt

$\mathbf{x = 4}$ einfache Nullstelle $\Rightarrow$ Schnittpunkt

Graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt.



Teilaufgabe 2.0 (4 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen k_a mit $k_a(x) = \frac{a}{4}\cdot\left[x^3 - (2\cdot a + 2)\cdot x^2 + (8\cdot a - 10)\cdot x + 8\right]$

mit $D_{k_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Berechnen Sie den Wert des Parameters a so, dass der Graph der Funktion k_a bei $x = 4$ die x-Achse als Tangente besitzt.

$$k(x,a) := \frac{a}{4}\cdot\left[x^3 - (2\cdot a + 2)\cdot x^2 + (8\cdot a - 10)\cdot x + 8\right]$$

x- Achse ist Tangente $\Rightarrow$ $x = 4$ ist Nullstelle.

$k(4,a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 64 - (2\cdot a + 2)\cdot 16 + (8\cdot a - 10)\cdot 4 + 8 \rightarrow 0$ unabhängig von a

$$k'(x,a) := \frac{a}{4}\cdot\left[3\cdot x^2 - 2\cdot(2\cdot a + 2)\cdot x + (8\cdot a - 10)\right]$$

$k'(4,a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot 16 - 2\cdot(2\cdot a + 2)\cdot 4 + (8\cdot a - 10) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 48 - 16\cdot a - 16 + 8\cdot a - 10 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -8\cdot a + 22 = 0 \text{ auflösen}, a \;=\; \frac{11}{4} \qquad a = \frac{11}{4} = 2.75$

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

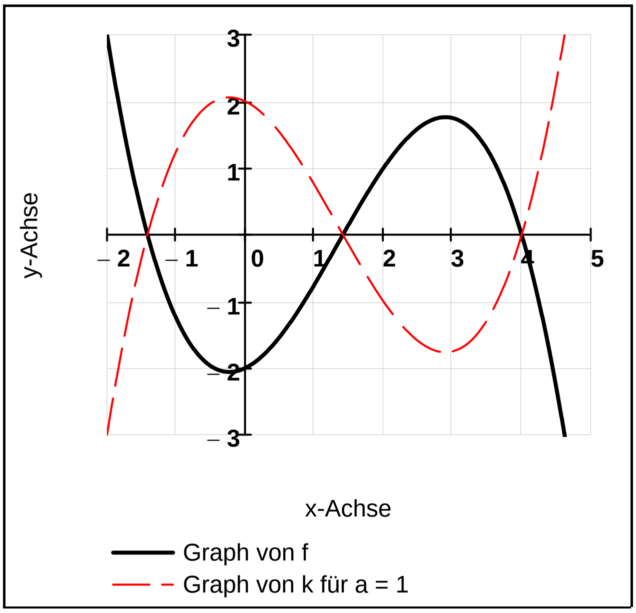
Untersuchen Sie, welcher Zusammenhang zwischen den Graphen der Funktion f (aus 1.0) und k_1 $(a = 1)$ besteht.

$$k(x,1) = \frac{x^3}{4} - x^2 - \frac{x}{2} + 2$$

$$f(x) = x^2 - \frac{x^3}{4} + \frac{x}{2} - 2$$

$$f(x) = -k(x,1)$$

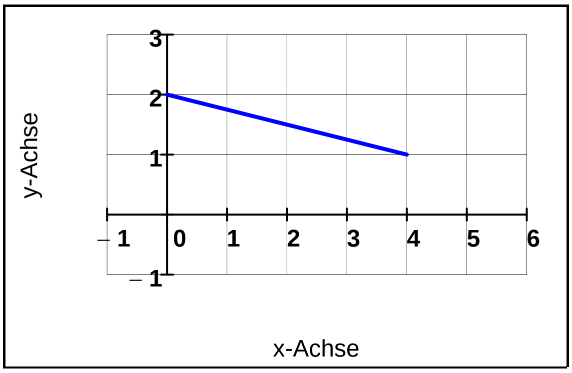
Der Graph von f und der Graph von k sind bezüglich der x-Achse zueinander symmetrisch.



Teilaufgabe 3 (7 BE)
Eine Kugel soll eine Bahn hinabrollen, die durch den Graphen G_h der Funktion h mit dem Funktionsterm

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } 0 \le x \le 4 \\ \frac{-1}{8}\cdot\left(x^2 - 6\cdot x\right) & \text{if } 4 < x \le 6 \end{cases}$$

beschrieben wird. Dabei ist der Graph von g das in oben stehender Skizze dargestellte Geradenstück.
Prüfen Sie durch Rechnung, ob die Bahn G_h an der Stelle $x = 4$ einen Sprung bzw. einen Knick aufweist.



Gleichung der Geraden: $g(x) = \frac{-1}{4}\cdot x + 2$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 4^-} \left(\frac{-1}{4}\cdot x + 2\right) \to 1$

Funktionswert: $h(4) = g(4) = 1$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 4^+} \left[\frac{-1}{8}\cdot\left(x^2 - 6\cdot x\right)\right] \to 1$

Der Graph von h ist stetig an der Stelle $x = 4$ stetig, also **kein Sprung** an der Stelle $x = 4$.

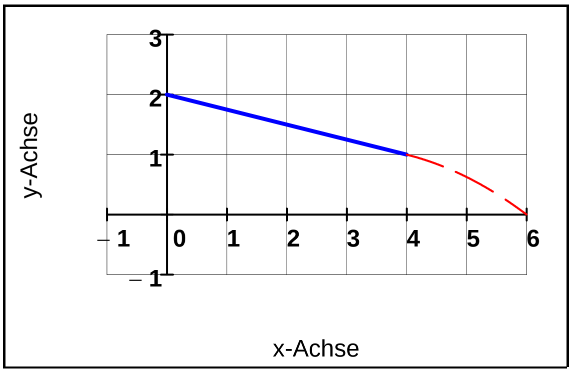
Ableitungsfunktion: $$h'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{4} & \text{if } 0 < x < 4 \\ \frac{-1}{4}\cdot x + \frac{3}{4} & \text{if } 4 < x < 6 \end{cases}$$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 4^-} \left(\frac{-1}{4}\right) \to -\frac{1}{4}$

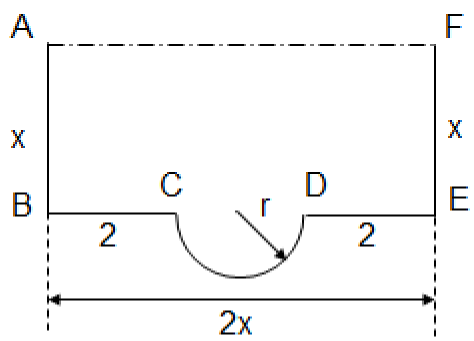
Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 4^+} \left(\frac{-1}{4}\cdot x + \frac{3}{4}\right) \to -\frac{1}{4}$

Der Graph von h ist differenzierbar an der Stelle $x = 4$ stetig, also **kein Knick** an der Stelle $x = 4$.

Graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt.



Teilaufgabe 4.0
Der Querschnitt eines Abflusskanals ist begrenzt durch ein Rechteck und einen Halbkreis mit Radius r. Alle Angaben sind in Meter. Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet.



Teilaufgabe 4.1 **(5 BE)**
Zeigen Sie, dass sich die Maßzahl $A(x)$ der Querschnittsfläche des Kanals in Abhängigkeit von x durch $A(x) = (2 + 0.5\cdot\pi)\cdot x^2 - 2\cdot\pi\cdot x + 2\cdot\pi$ darstellen lässt.

Querschnittsfläche = Rechteck + Halbkreis $\quad A(x) = 2\cdot x\cdot x + \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi$

Nebenbedingung: $\quad 2\cdot x = 2 + 2\cdot r + 2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2\cdot x - 4}{2} = x - 2$

Einsetzen: $\quad A(x) = 2\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(x-2)^2$

$$A(x) = 2\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\left(x^2 - 4\cdot x + 4\right)$$

$$A(x) = 2\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot x^2 - 2\cdot\pi\cdot x + 2\cdot\pi$$

$$A(x) := \left(2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\right)\cdot x^2 - 2\cdot\pi\cdot x + 2\cdot\pi$$

Teilaufgabe 4.2 (3 BE)
Die Strecken [AB], [BC], [DE] und [EF] besitzen in der Summe höchstens eine Länge von 12 m. Weisen Sie nach, dass dann für die sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A der Funktion $A(x)$ gilt: $D_A =]\,2\,;\,4\,]$.

$$AB + BC + DE + EF = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 + 2 + x \le 12 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot x \le 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \le 4$$

aus der Breite: $2\cdot x > 4 \qquad x > 2$

Definitonsmenge: $2 < x \le 4$

Teilaufgabe 4.3 (4 BE)
Bestimmen Sie x so, dass die zugehörige Querschnittsflche maximalen Inhalt annimmt.

Ableitungsfunktion:

$$A'(x) := \left(2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\right)\cdot 2\cdot x - 2\cdot\pi$$

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\right)\cdot 2\cdot x - 2\cdot\pi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_E = \frac{2\cdot\pi}{\left(2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\right)\cdot 2} = \frac{\pi}{2 + \frac{1}{2}\cdot\pi} = 0.8798 \quad \notin D$$

Randwerte:

$$\lim_{x \to 2^+} \left[\left(2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\right)\cdot x^2 - 2\cdot\pi\cdot x + 2\cdot\pi\right] \to 8$$

$$A(4) = 38.283$$

Randextremum an der Stelle $x = 4$.

Teilaufgabe 4.4 (3 BE)
Nun sei $x = 4$. Der Kanal ist bis 1 m unter der Oberkante gefüllt.
Berechnen Sie, wie viel Prozent der Querschnittsfläche des Kanals ausgelastet sind.

1 m weniger gefüllt, d. h. es fehlen $1\cdot 8 = 8$

$$\frac{A(4) - 8}{A(4)} = 0.791 \qquad \text{Der Kanal ist zu 79,10\% gefüllt.}$$