Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 12 Nichttechnik - A II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) := \frac{1}{20}\cdot x^4 - \frac{2}{5}\cdot x^2 - \frac{9}{8}\cdot x + \frac{4}{5}$ mit der Definitionsmenge

$D_f = IR$.

Teilaufgabe 1.1 (8 BE)

Zeigen Sie, dass G_f für $x = \frac{5}{2}$ einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt.

Bestimmen Sie mithilfe der maximalen Monotonieintervalle Art und Koordinaten aller Punkt auf G_f mit waagrechter Tangente.

$$f'(x) := \frac{1}{5}\cdot x^3 - \frac{4}{5}\cdot x - \frac{9}{8}$$

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

Polynomdivision:

$$\left(\frac{1}{5}\cdot x^3 - \frac{4}{5}\cdot x - \frac{9}{8}\right) \div \left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{5}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{9}{20}$$

$$-\left(\frac{1}{5}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{4}{5}\cdot x$$

$$-\left(\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{5}{4}\cdot x\right)$$

$$\frac{9}{20}\cdot x - \frac{9}{8}$$

$$-\left(\frac{9}{20}\cdot x - \frac{9}{8}\right)$$

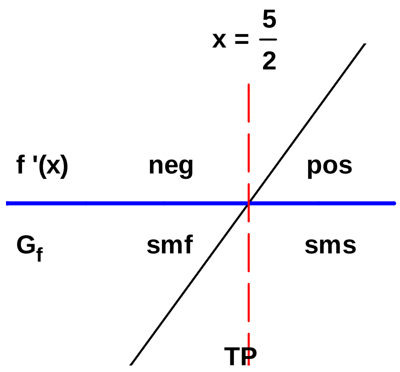
$$- \quad -$$

$$\frac{1}{5}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{9}{20} = 0 \text{ auflösen} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{11}\cdot i}{4} \\ -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{11}\cdot i}{4} \end{pmatrix}$$

keine reellen Lösungen

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{9}{20}\right)$$

Da $\left(\frac{1}{5}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{9}{20}\right) > 0$, wird das Vorzeichen von $f'(x)$ bestimmt durch den Term $\left(x - \frac{5}{2}\right)$.



G_f ist streng monoton fallend in $\left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right]$ und

G_f ist streng monoton steigend in $\left[\frac{5}{2}\,;\,\infty\right[$.

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{819}{320} = -2.56$$

Tiefpunkt $\boxed{TP(2.5, -2.56)}$

Teilaufgabe 1.2 **(4 BE)**
Ermitteln Sie die Koordinaten aller Wendepunkte von G_f auf zwei Nachkommastellen gerundet.

$$f''(x) := \frac{3}{5}\cdot x^2 - \frac{4}{5}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_W := \frac{3}{5}\cdot x^2 - \frac{4}{5} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.15 \\ -1.15 \end{pmatrix}$$

jeweils Nullstelle mit VZW, also Wendestellen.

$f\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) = 1.65$ $\qquad$ $WP_1(-1.15, 1.65)$

$f\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) = -0.94$ $\qquad$ $WP_2(1.15, -0.94)$

Teilaufgabe 1.3 **(5 BE)**
Begründen Sie, dass f im Intervall $J = [\,3\,;\,4\,]$ genau eine Nullstelle x_0 besitzt. Ermitteln Sie ein Intervall $J_0 \subset J$ der Länge $\Delta x = 0.25$, das diese Nullstelle x_0 enthält.

$f(3) = -2.125$ $\qquad$ $f(4) = 2.7$ $\qquad$ VZW, d. h. es gibt eine Nullstelle.

G_f ist streng monoton steigend, d.h. G_f hat genau eine Nullstelle.

$f(3.5) = -0.534$ $\qquad$ $f(3.75) = 0.844$ $\qquad$ VZW, also liegt die Nullstelle im Intervall $]\,3.5\,;\,3.75\,[$

Teilaufgabe 1.4 **(6 BE)**
Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich die Graphen der Funktionen f und g mit

$g(x) := \frac{-9}{8} \cdot x$ und $D_g = \mathrm{IR}$, für $x = \pm 2$ berühren.

Berechnen Sie die Koordinaten der Berührpunkte.

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{20} \cdot x^4 - \frac{2}{5} \cdot x^2 - \frac{9}{8} \cdot x + \frac{4}{5} = \frac{-9}{8} \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{20} \cdot x^4 - \frac{2}{5} \cdot x^2 + \frac{4}{5} = 0$$

Substitution: $x^2 = z$

$$\frac{1}{20} \cdot z^2 - \frac{2}{5} \cdot z + \frac{4}{5} = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$ zweifache Nullstelle

$$\Leftrightarrow \quad (z - 4)^2 = 0$$

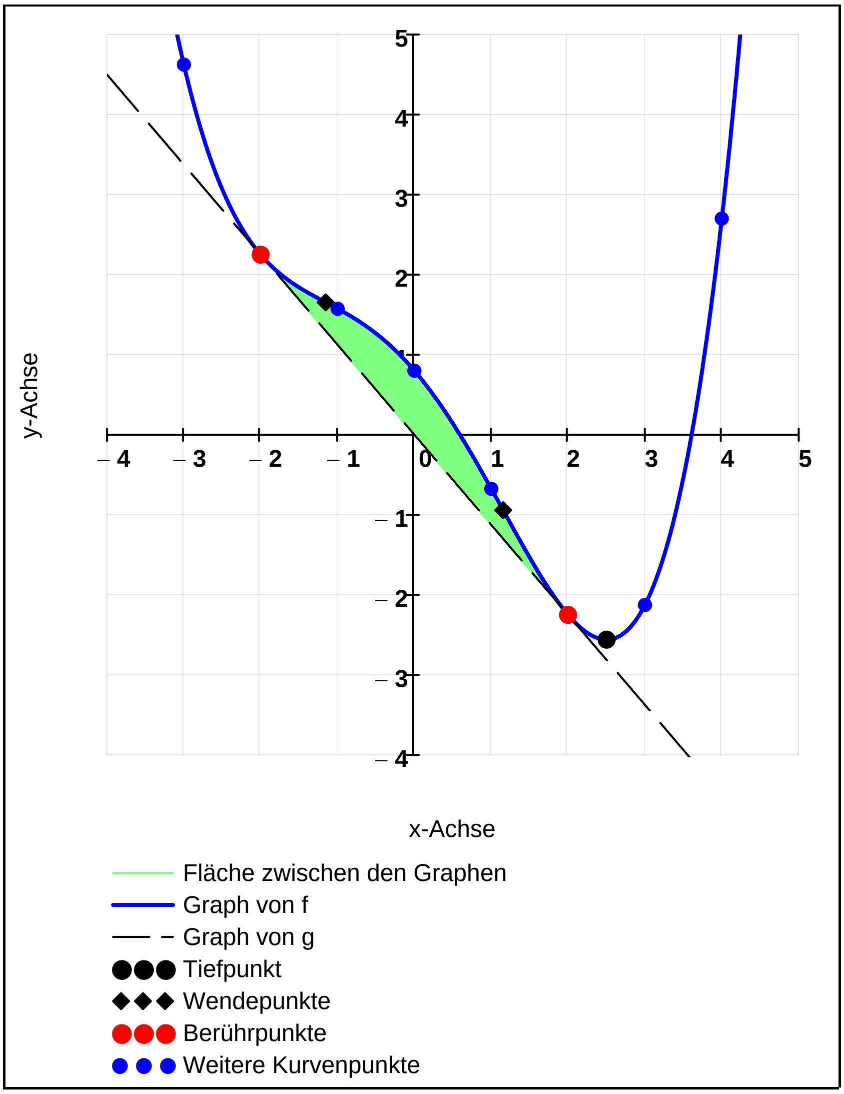
$$\Leftrightarrow \quad \left(x^2 - 4\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [(x + 2) \cdot (x - 2)]^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)^2 \cdot (x - 2)^2 = 0$$

$x = -2$ und $x = 2$ jeweils zweifache Nullstelle der Differenzfunktion, also berühren sich die Graphen von f und g.

$g(-2) = 2.25$ $\quad$ $BP_1(-2, 2.25)$

$g(2) = -2.25$ $\quad$ $BP_2(2, -2.25)$

Teilaufgabe 1.5 (6 BE)
Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g im Bereich $-3 \le x \le 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem.



$x_T =$	$f(x_T) =$
-3	4.6
-1	1.6
0	0.8
1	-0.7
3	-2.1
4	2.7

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)
Die Graphen G_f und G_g schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Stammfunktion: $$D(x) := \int \left(\frac{x^4}{20} - \frac{2 \cdot x^2}{5} + \frac{4}{5}\right) dx \rightarrow \frac{x^5}{100} - \frac{2 \cdot x^3}{15} + \frac{4 \cdot x}{5}$$

$D(2) = 0.853$ $\quad D(-2) = -0.853$ $\quad A := D(2) - D(-2)$ $\quad A = 1.707$

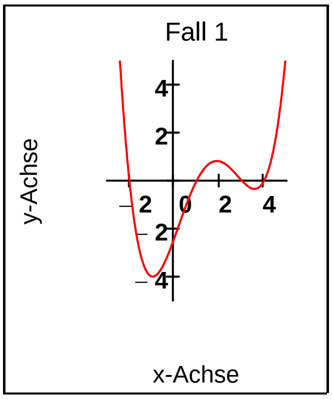
Teilaufgabe 2 (4 BE)
Gegeben ist die allgemeine ganzrationale Funktion u vierten Grades durch

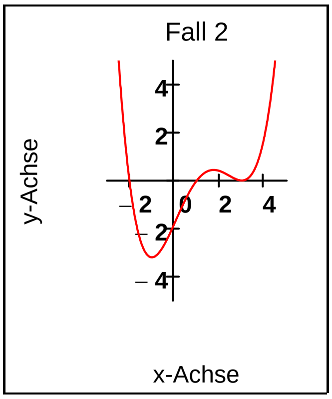
$\mathbf{u}(x) = \mathbf{a} \cdot x^4 + \mathbf{b} \cdot x^3 + \mathbf{c} \cdot x^2 + \mathbf{d} \cdot x + \mathbf{e}$ mit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} \neq 0$.

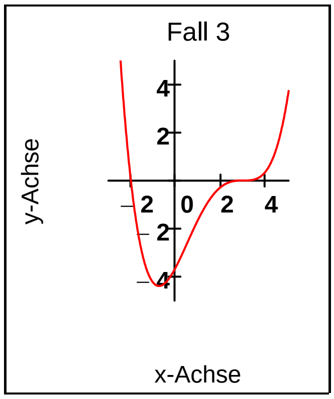
geben Sie ohne Begründung und ohne Rechnung einen Überblick, wie viele Nullstellen (Anzahl und Vielfachheit!) die Funktion u haben kann.

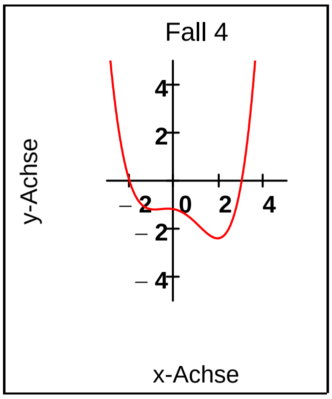
1. Vier Nullstellen, jeweils einfach
2. drei Nullstellen: Zwei einfache, eine zweifache
3. zwei Nullstellen: eine einfach, eine dreifach
4. zwei Nullstellen: jeweils einfach
5. zwei Nullstellen; jeweils zweifach
6. eine Nullstelle: vierfach
7. eine Nullstelle: zweifach
8. keine Nullstellen

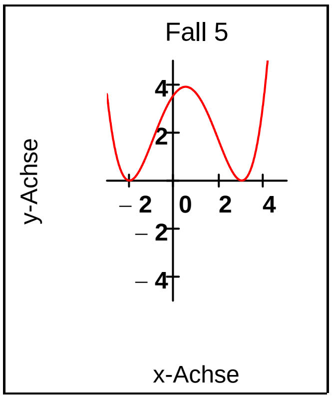
Darstellung in der Prüfung nicht verlangt!

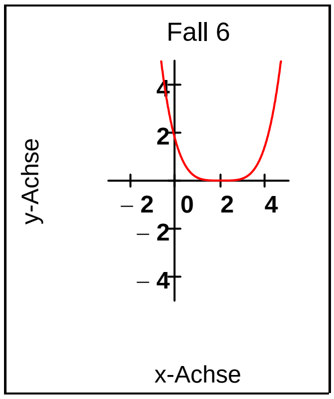


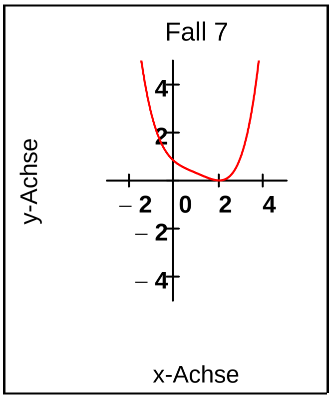


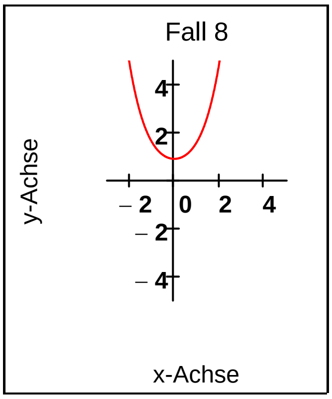












Teilaufgabe 3.0
Gegegeben sind mit dem Parameter $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $D_{h_k} = \mathbb{R}$ die quadratischen Funktionen

$$h_k(x) = k \cdot x^2 + (2 \cdot k - 1) \cdot x + \frac{1}{4} \cdot k^2 + \frac{1}{4 \cdot k}.$$

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)
Untersuchen Sie, für welchen Parameterwert k der Graph von h_k symmetrisch zum Koordinatensystem ist. Erläutern Sie ihr Vorgehen.

Es dürfen nur gerade Potenzen von x vorliegen, da eine quadratische Funktion nur achsensymmetrisch sein kann.

$$2 \cdot k - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)
Weisen Sie nach, dass $D = -k^3 + 4 \cdot k^2 - 4 \cdot k$ die Diskriminante der Gleichung $h_k(x) = 0$ ist.

$$D(k) = (2 \cdot k - 1)^2 - 4 \cdot k \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot k^2 + \frac{1}{4 \cdot k} \right)$$

$$D(k) = 4 \cdot k^2 - 4 \cdot k + 1 - k^3 - 1 = -k^3 + 4 \cdot k^2 - 4 \cdot k$$

Teilaufgabe 3.3 (5 BE)
Bestimmen Sie nun diejenigen Werte k, für die die quadratische Funktion h_k mindestens eine Nullstelle besitzt.

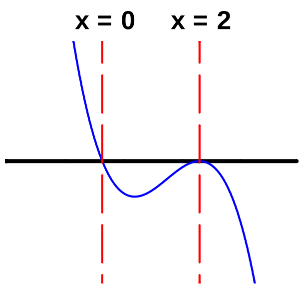
Mindestens eine Nullstelle: $D(k) \geq 0$

$$D(k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -k^3 + 4 \cdot k^2 - 4 \cdot k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -k \cdot \left(k^2 - 4 \cdot k + 4\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad -k\cdot(k-2)^2 = 0 \qquad k_1 = 0$ einfach, aber nicht definiert $\qquad k_2 = 2$ zweifach

$D(k) := -k\cdot(k-2)^2$

Vorzeichen der Diskriminante:

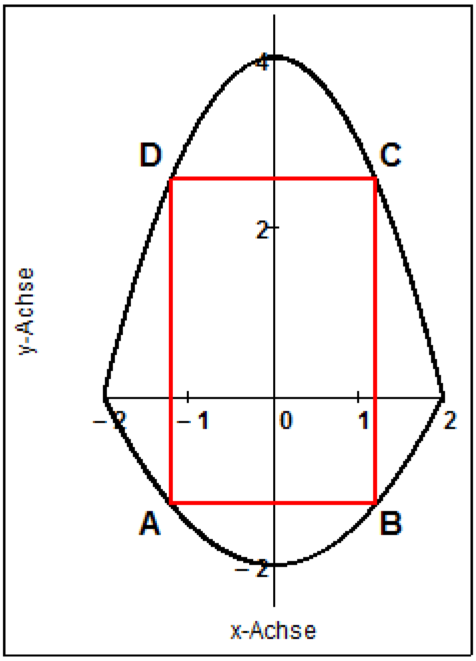


Mindestens eine Nullstelle für $k \in \left]-\infty\,;\,0\right[\cup \{2\}$.

Teilaufgabe 4.0
Die Graphen der reellen Funktionen p und q

mit $p(x) := -x^2 + 4$ und $q(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2$

und mit $D_p = D_q = [-2\,;\,2]$ bilden die nebenstehend abgebildete Fläche. Darin einbeschrieben ist das Rechteck ABCD, dessen Eckpunkte auf den Graphen der Funktionen p und q liegen.



Teilaufgabe 4.1 (4 BE)
Bestimmen Sie die Maßzahl $A(a)$ der Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von a und geben Sie eine sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A an.

[Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -3\cdot a^3 + 12\cdot a$]

$$A(a) = 2\cdot a\cdot(p(a) - q(a)) = 2\cdot a\cdot\left[-a^2 + 4 - \left(\frac{1}{2}\cdot a^2 - 2\right)\right] = 2\cdot a\cdot\left(\frac{-3}{2}\cdot a^2 + 6\right) = -3\cdot a^3 + 12\cdot a$$

$D_a = \left]0\,;\,2\right[$

Teilaufgabe 4.2 (7 BE)
Bestimmen Sie a so, dass die zugehörige Fläche maximalen Inhalt annimmt.
Berechnen Sie für diesen Fall die Maßzahlen für die Fläche, Breite und Länge des Rechtecks.

$$A(a) := -3 \cdot a^3 + 12 \cdot a$$

$$A'(a) := -9 \cdot a^2 + 12$$

$$A'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -9 \cdot a^2 + 12 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

keine Lösung

Extremstelle: $a_{max} := \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$ $\qquad a_{max} = 1.155$

Funktionswert: $A_{max} := A(a_{max}) = \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{3}$

Vergleich mit den Randwerten:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \left(-3 \cdot a^3 + 12 \cdot a\right) \rightarrow 0 \qquad \lim_{a \rightarrow 2^-} \left(-3 \cdot a^3 + 12 \cdot a\right) \rightarrow 0$$

Absolutes Maximum = Fläche: $A_{max} = 9.238$

Breite: $b := 2 \cdot a_{max} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}$ $\qquad b = 2.309$

Länge: $l := p(a_{max}) - q(a_{max})$ $\qquad l = 4$

Wähle: $a_0 := a_{max}$