Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

• Mathematik 12 Nichttechnik - S I - Lösung

made with mathcad

Im Folgenden werden relative Häufgkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Teilaufgabe 1.0
Bei einer Casting-Show werden Models gekürt. Dazu gehen junge Damen eine Laufsteg entlang und präsentieren Kleider. Jedes Model hat genau einen Auftritt.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)
Zwei blonde (b), ein schwarzhaariges (s) und ein rothaariges (r) Model bereiten sich auf ihren Auftritt vor. Die Reihenfolge, in der die ersten drei Models aufgerufen werden, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.
Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten alle 12 Elementarereignisse. Begründen Sie, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt.

Das Zufallsexperiment entspricht dem Urnenmodell ohne Zurücklegen: Vgl. Anhang)

Es gibt folgende Reihenfolgen für das Laufen der Models:

$$\begin{pmatrix} \text{w} & \text{bbs} & \text{bbr} & \text{bsb} & \text{bsr} & \text{brb} & \text{brs} \\ \text{"P(\{w\})"} & \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \\ \text{"Produkt P(\{w\})"} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{w} & \text{sbb} & \text{sbr} & \text{srb} & \text{rbb} & \text{rbs} & \text{rsb} \\ \text{"P(\{w\})"} & \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} & \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} \\ \text{"Produkt P(\{w\})"} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um eine Laplace-Experiment, da alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_1: *Das dritte Modell hat rote Haare.*
E_2: *Das erste Model ist nicht blond.*
E_3: *Das Gegenereignis von* $E_1 \cup \overline{E_2}$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1, E_2 und E_3.

$E_1 = \{\text{ bbr, bsr, sbr }\}$ $\qquad P(E_1) = 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$

$E_2 = \{ \text{sbb, sbr, srb, rbb, rbs, rsb} \}$ $\quad P(E_2) = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

$\overline{E_1} = \{ \text{bbs, bsb, brb, brs, sbb, srb, rbb, rbs, rsb} \}$

$E_3 = \overline{E_1} \cap E_2 = \{ \text{sbb, srb, rbb, rbs, rsb} \}$ $\quad P(E_3) = 5 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

Teilaufgabe 2.0
Es steht eine große Zahl Kleider der Marken A, D, G und V zur Verfügung.
Im Folgenden werden fünf Auftritte des Models Eva betrachtet. Die Auswahl eines Kleides erfolgt zufällig, wobei das getragene Kleid wieder zurückgehängt wird und für einen weiteren Auftritt zur Verfügung steht.
Es gelten folgende Wahrscheinlichkeiten: $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(D) = \frac{1}{4}$ und $P(V) = \frac{1}{8}$

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_4: *Eva trägt kein Kleid der Marke V.*
E_5: *Eva trägt mehr als dreimal ein Kleid der Marke D.*
E_g: *Eva trägt jeweils genau zwei Kleider der Marke A hintereinander und der Marke G hintereinander.*

$$P(E_4) = \left(\frac{7}{8}\right)^5 = 0.51291$$

$$P(E_5) = P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = B\left(5, \frac{1}{4}, 4\right) + B\left(5, \frac{1}{4}, 5\right) = 0.01465 + 0.00098 = 0.01563$$

$$P(G) = 1 - (P(A) + P(D) + P(V)) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$

Mögliche Reihenfolgen:

$K = V \vee D \qquad P(V \vee D) = P(V) + P(D) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

AAKGG KAAGG AAGGK GGKAA KGGAA GGAAK

$P(A)$ $P(G)$ $P(K)$
$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$$P(E_5) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{24}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{8}\right) = 0.02127$$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der von Eva getragenen Kleider der Marke A an.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte der Zufallsgröße innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Binomialverteilt Zufallsgröße: $p_A := \frac{1}{3}$ $\quad n := 5$

Erwartungswert: $\mu := n \cdot p_A$ $\quad \mu = \frac{5}{3}$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{n \cdot p_A \cdot (1 - p_A)}$ $\quad \sigma = \frac{\sqrt{10}}{3}$

untere Grenze: $\mu - \sigma = \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3} = 0.613$

obere Grenze: $\mu + \sigma = \frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{5}{3} = 2.721$

$$P(0.613 < X < 2.721) = P(1 \le X \le 2) = P(X = 2) - P(X = 0) = \sum_{i=0}^{2} B\left(5, \frac{1}{3}, i\right) - \sum_{i=0}^{0} B\left(5, \frac{1}{3}, i\right)$$

$$\blacksquare = 0.79012 - 0.13169 = 0.65843$$

Teilaufgabe 3 (5 BE)
$\frac{3}{4}$ von 24 Models tragen Schuhe einer bestimmten Marke (M). Neun der Models, die diese Schuhe tragen, klagen über Hautreizungen (H) an den Füßen. Insgesamt hat die Hälfte aller Modells kleine Hautreizungen.
Prüfen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel, ob die Ereignisse M und H stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie das Ereignis im vorliegenden Zusammenhang.

Gegeben: $P(M) = \frac{0.75 \cdot 24}{24} = 0.75$ $\quad P(H) = 0.5$ $\quad P(M \cap H) = \frac{9}{24} = 0.375$

ergänzte Vierfeldertafel

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & M & \overline{M} & \blacksquare \\ H & 0.375 & \blacksquare & 0.5 \\ \overline{H} & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & 0.75 & \blacksquare & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \blacksquare & M & \overline{M} & \blacksquare \\ H & 0.375 & 0.125 & 0.5 \\ \overline{H} & 0.375 & 0.125 & 0.5 \\ \blacksquare & 0.75 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnungen:

$0.5 - 0.375 = 0.125$

$0.75 - 0.375 = 0.375$

$P(M) \cdot P(H) = 0.75 \cdot 0.5 = 0.375 = P(M \cap H)$ $\quad$ Also sind M und H stochastisch unabhängig.

Teilaufgabe 4.0
Am Ende der Show bewerten die Zuschauer jedes Model. Eva hatte bei der letzten Bewertung eine Zustimmung von 60% erhalten. Es wird vermutet, dass Eva bei der nächsten Bewertung weniger Zustimmung bekommt (Gegenhypothese).
Zur Überprüfung der Vermutung wird eine Umfrage unter 200 Personen durchgeführt.

Teilaufgabe 4.1 (5 BE)
Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den minimalen Annahmebereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

Testgröße: Anzahl der Zustimmungen für Eva bei $n := 200$ Befragten. $p := 0.6$

Nullhypothese H_0: $p_0 \geq p \rightarrow p_0 \geq 0.6$

Gegenhypothese H_1: $p_1 < p \rightarrow p_1 < 0.6$

Annahmebereich: $A = \{ k + 1, k + 2, ..., 200 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 0, 1, ..., k \}$

Linksseitiger Signifikanztest.

TW Seite30

$P(\overline{A}) \leq 0.05$ $\quad \sum_{i=0}^{k} B(200, 0.6, i) \leq 0.05$ -----------------> $0.04918 \Rightarrow k := 108$

$A = \{ 109, 110, ..., 200 \}$

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)
Geben Sie an, wie man anhand des Tests (vgl. 4.1) entscheidet, wenn nur 55% der Befagten Eva die Zustimmung geben.
Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht und warum man seine Wahrscheinlichkeit nicht berechnen kann.

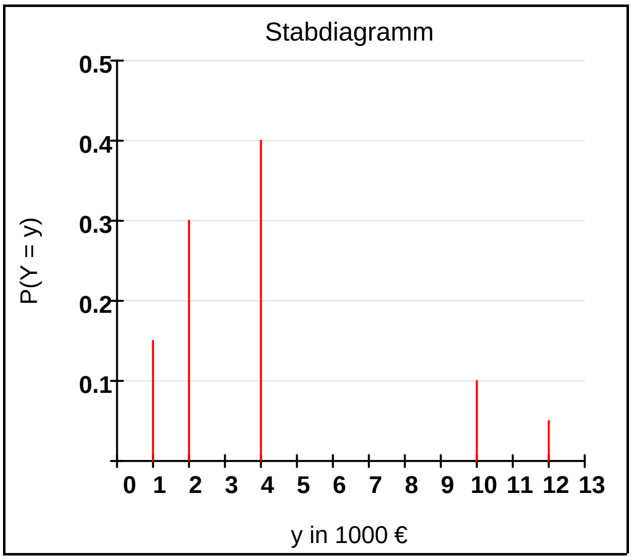
$0.55 \cdot 200 = 110$ liegt im Annahmebereich, also bekommt Eva weiterhin 60% Zustimmung.

Fehler 2. Art: Man hält weiterhin an der Zustimmung für Eva von mindestens 60% fest, obwohl sie in Wirklichkeit geringer ist.
Der Fehler 2. Art kann nicht berechnet werden, da die tatsächliche Zustimmungsrate von Eva nicht bekannt ist.

Teilaufgabe 5 (4 BE)
Das Monatsgehalt Y der Vorjahressiegerin der Casting-show kann als Zufallsgröße mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst werden:

$$\begin{pmatrix} \text{"y in €"} & 1000 & 2000 & 4000 & 10000 & 12000 \\ P(Y=y) & 0.15 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung geeignet graphisch dar und untersuchen Sie rechnerisch, ob das Model mit einem festen Monatsgehalt von 3540 € auf lange Sicht mehr verdienen würde.



Erwartungswert:

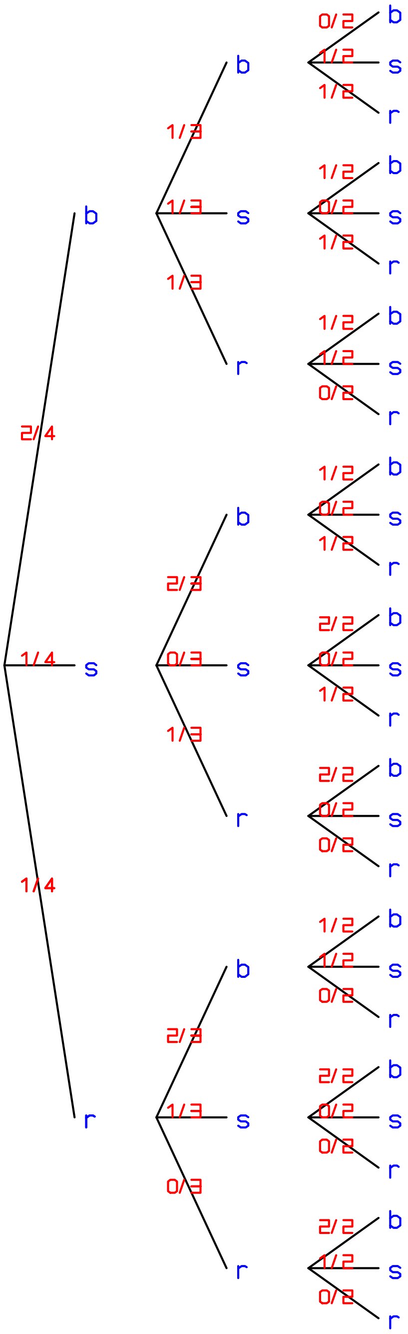
$\mu := 1000 \cdot 0.15 + 2000 \cdot 0.3 + 4000 \cdot 0.4 + 10000 \cdot 0.1 + 12000 \cdot 0.05$ $\qquad \mu = 3950$

Langfristig wäre das feste Monatsgehalt ungünstiger.

Anhang zu 1.1

Berechnungen

Baumdiagramm "ohne Zurücklegen"



p(b b b)=0/24 = 0
p(b b s)=2/24 = 0.08333
p(b b r)=2/24 = 0.08333
p(b s b)=2/24 = 0.08333
p(b s s)=0/24 = 0
p(b s r)=2/24 = 0.08333
p(b r b)=2/24 = 0.08333
p(b r s)=2/24 = 0.08333
p(b r r)=0/24 = 0
p(s b b)=2/24 = 0.08333
p(s b s)=0/24 = 0
p(s b r)=2/24 = 0.08333
p(s s b)=0/24 = 0
p(s s s)=0/24 = 0
p(s s r)=0/24 = 0
p(s r b)=2/24 = 0.08333
p(s r s)=0/24 = 0
p(s r r)=0/24 = 0
p(r b b)=2/24 = 0.08333
p(r b s)=2/24 = 0.08333
p(r b r)=0/24 = 0
p(r s b)=2/24 = 0.08333
p(r s s)=0/24 = 0
p(r s r)=0/24 = 0
p(r r b)=0/24 = 0
p(r r s)=0/24 = 0
p(r r r)=0/24 = 0

Gesamtsumme = 1