Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 12 Nichttechnik - S II - Lösung**

Ein Onlineshop ist spezialisiert auf den Vertrieb von Gartengrills (mit Zubehör) an Endkunden. Relative Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

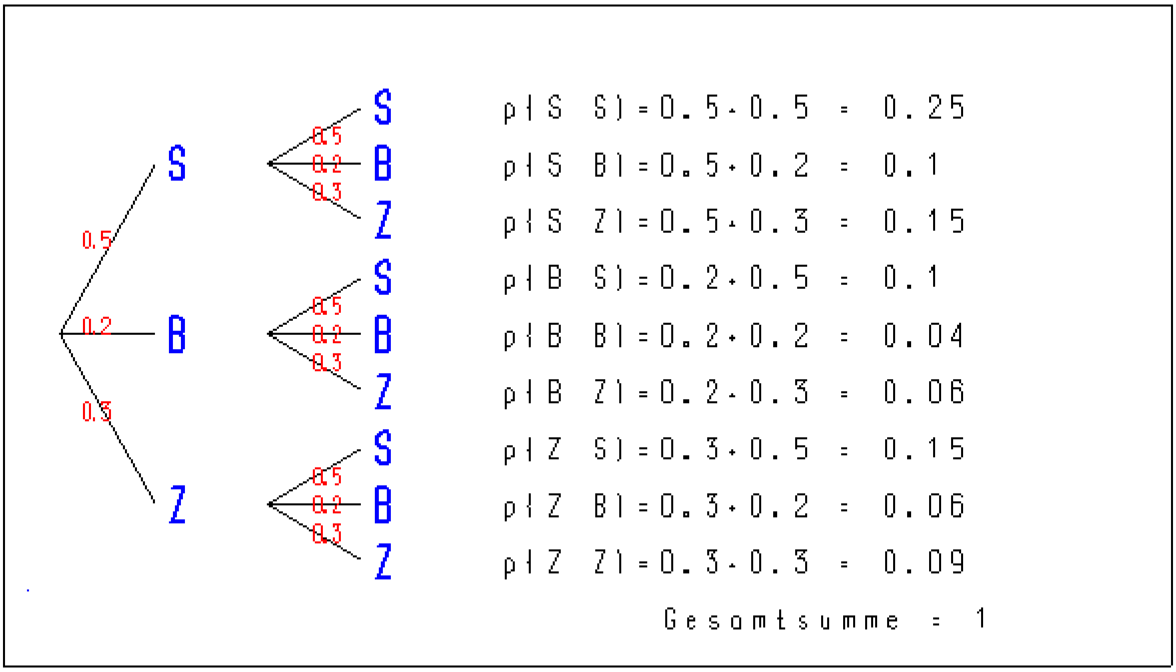
Teilaufgabe 1.0
Bei einer Frühlingsaktion erhält jeder, der bei diesem Shop einen Grill bestellt, gratis einen von drei Zubehörartikeln. Der Kunde kann so zwischen einer Grillschürze (S), einer Reinigungsbürste (B) oder einer Grillzange (Z) auswählen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich 50% der Kunden für die Schürze, die übrigen wählen die Bürte bzw. die Zange. Im Folgenden wird die Wahl der Zubehörartikel für die nächsten beiden eingehenden Bestellungen zu dieser Frühlingsaktion als Zufallsexperiment betrachtet. Dabei ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit für zweimal Reinigungsbürste 4% beträgt.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)
Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 9 Elementarereignisse.
[Teilergebnis: 30% wählen die Grillzange]

Gegeben: $P(S) = 0.5$ $\quad$ $P(BB) = 0.04$

$P(B) = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0.04 \quad \Rightarrow \quad x = 0.2 \quad P(B) = 0.2$

$P(Z) = 1 - (0.5 + 0.2) \quad \Rightarrow \quad P(Z) = 0.3$



Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Gegeben seien folgende Ereignisse:
E_1: *Genau eine Schürze wird bestellt.*
E_2: *Es wird keine Zange bestellt.*
Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und überprüfen Sie beide Ereignisse auf Unvereinbarkeit.

$\mathbf{E_1 = \{\ SB;\ SZ;\ BS;\ ZS\ \}}$

$\mathbf{E_2 = \{\ SS;\ SB;\ BS;\ BB\ \}}$

$\mathbf{E_1 \cap E_2 = \{\ SB;\ BS\ \}}$ $\qquad$ $\mathbf{E_1 \cap E_2}$ ungleich **{ }**, also vereinbar.

Teilaufgabe 2 (5 BE)
In diesem Shop werden ausschließlich Holzkohle- und Gasgrills angeboten. Von 300 im letzten Monat verkauften Grills sind 80 Gasgrills. An Singlehaushalte gingen 30 Gasgrills. Größere Haushalte (zwei oder mehr Personen) haben in diesem Zeitraum 180 Holzkohlegrills gekauft. Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob der Kauf eines Gasgrills unabhängig von der Haushaltsgröße ist.

Gegeben:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & S & \overline{S} & \blacksquare \\ G & \frac{30}{300} & \blacksquare & \frac{80}{300} \\ \overline{G} & \blacksquare & \frac{180}{300} & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 1 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{4}{15} - \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{5} = \frac{23}{30}$$

$$\frac{7}{30} - \frac{1}{10} = \frac{2}{15}$$

ergänzte Vierfeldertafel:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & S & \overline{S} & \blacksquare \\ G & \frac{1}{10} & \frac{1}{6} & \frac{4}{15} \\ \overline{G} & \frac{2}{15} & \frac{3}{5} & \frac{1}{15} \\ \blacksquare & \frac{7}{30} & \frac{23}{30} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P(G) = \frac{4}{15}} \qquad \mathbf{P(S) = \frac{7}{30}} \qquad \mathbf{P(G) \cdot P(S) = \frac{4}{15} \cdot \frac{7}{30} = \frac{14}{225} = 0.062}$$

$$\mathbf{P(S \cap G) = \frac{1}{10} = 0.1}$$

$\mathbf{P(G) \cdot P(S) \neq P(S \cap G)}$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ S und G sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 3 (7 BE)
Von 1500 Kunden, die bei diesem Shop bisher einen Holzkohlegrill bestellten, wählen 600 einen Kugelgrill (geschlossen nutzbar), die anderen entschieden sich für ein Modell ohne Deckel. Es werden zwölf Bestellungen eines Holzkohlegrills zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
E_3: *Genau fünf Kunden entschieden sich für den Kugelgrill.*
E_4: *Nur der erste und der zweite Kunde wählen ein Modell ohne Deckel.*
E_5: *Mindestens zwei Kunden entschieden sich für einen Kugelgrill.*

Gegeben: Modell Kugelgrill: $P(K) := \frac{600}{1500}$ $\quad P(K) = 0.4 \quad n := 12$

Modell ohne Deckel: $P(\overline{K}) = 0.6$

$$P(E_3) = B(12, 0.4, 5) = \binom{12}{5} \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^7 = 792 \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^7 = 0.22703$$

$$P(E_4) = 1 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^{10} = 0.00004$$

$$P(E_5) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left[\binom{12}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^{11}\right]$$

$$P(E_5) = 1 - (0.00218 + 0.01744) = 0.98038$$

Teilaufgabe 4 (3 BE)
In dieser Saison ist der Gasgrill *Gourmet* neu im Sortiment. Von allen verkauften Gartengrills sind 5% von diesem Typ. In der Versandabteilung müssen an einem späten Nachmittag noch zehn Gartengrills versandfertig verpackt werden. Ermitteln Sie, wie viele *Gourmet-Grills* mindestens noch auf Lager sein müssten, damit deren Anzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% für diesen Nachmittag noch ausreicht.

$p := 0.05 \quad n := 10$

$$P(X \leq k) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{k} B(10, 0.05, i) > 0.99 \quad \xrightarrow[0.99897]{\text{TW Seite 12}} \quad k = 4$$

Es müssen mindestens 3 Gourmet-Grills auf Lager sein.

Teilaufgabe 5 (6 BE)
Der Hersteller der *Gourmet-Grills* verspricht, dass im Schnitt 97 von 100 produzierten Grills einwandfrei sind. der Geschäftsführer des Onlineshops hat aufgrund der bisherigen Reklamationen den Eindruck, dass die Qualtität der Grills deutlich geringer ist (Gegenhypothese).
Der Geschäftsführer schlägt daher vor, die nächsten 200 auszuliefernden Grills zu testen.Sind darunter mindestens 192 Grills einwandfrei, so wird er seine Zweifel an der Qualtität verwerfen.
Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Erläutern Sie kurz den Fehler 1. Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit.

Testgröße: Anzahl der einwandfreien Grills unter $n := 200$ $\qquad p := \frac{97}{100} = 0.97$

Gegenhypothese H_1: $p_1 < p \rightarrow p_1 < 0.97$

Nullhypothese H_0: $p_0 \geq p \rightarrow p_0 \geq 0.97$

Testart: Linksseitiger Hypothesentest

Annahmebereich: $A = \{ 192, 193, ..., 200 \}$

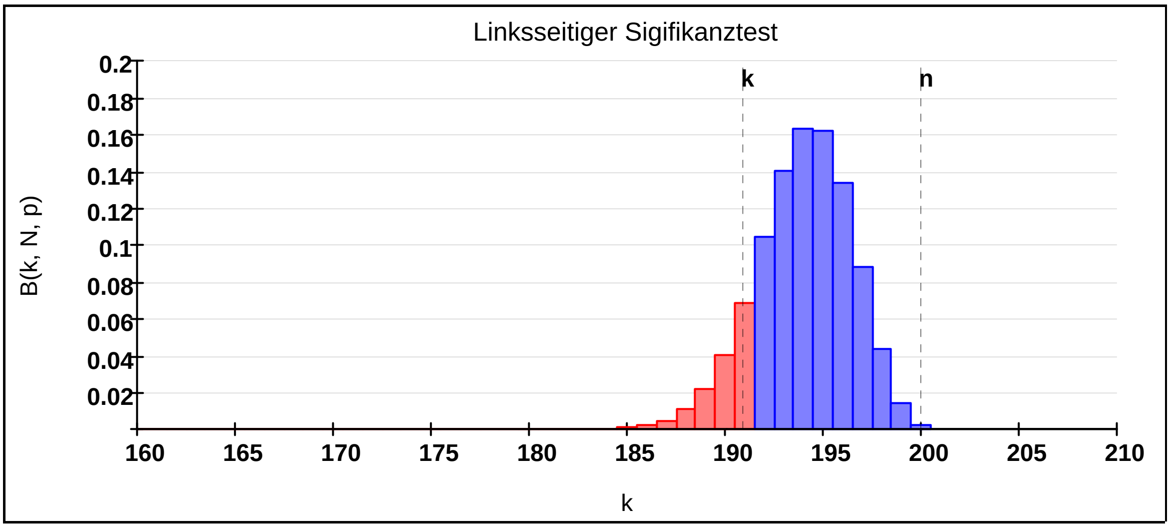
Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 0, 1, ..., 191 \}$

TW Seite 41

$$P(\overline{A}) = P(X \leq 191) = \sum_{i=0}^{191} B(200, 0.97, i) = 0.14960$$

Der Fehler erster Art besteht darin, dass man annimmt, dass der Anteil der einwandfreien Grills weniger als 97% beträgt, obwohl es mindestens 97% sind.

Darstellung



Teilaufgabe 6.0
Zu Werbezwecken legt der Onlineshop jeder Bestellungeines Holzkohlegrills einzeln verpackte Grillanzünder-Würfel bei. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl dieser Würfel an, die Kunden gemäß einer Online-Befragung pro *Start* ihres Grills verbrauchen. Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den n och zu bestimmenden Parametern **a, b** $\in$ **IR**:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ P(X = x) & a - 0.85 & 0.10 & a \cdot b & 2 \cdot b & 0.15 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 6.1 (4 BE)
Bestimmen Sie die Parameter a und b, wenn bekannt ist, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 45% maximal zwei Würfel verwendet werden.
[Teilergebnis: **b = 0.20**]

Gegeben: $P(X \le 2) = 0.45 \quad \Rightarrow \quad P(X \ge 3) = 1 - 0.45 = 0.55$

Gleichung (1) $a - 0.85 + 0.10 + a \cdot b = 0.45$

Gleichung (2) $2 \cdot b + 0.15 = 0.55$

Aus (2) $b := \dfrac{0.55 - 0.15}{2} = 0.2 \qquad b = 0.2$

In (1) $a - 0.85 + 0.10 + a \cdot 0.2 = 0.45 \quad \Leftrightarrow \quad 1.2 \cdot a = 0.45 + 0.85 - 0.10$

$a := \dfrac{0.45 + 0.85 - 0.10}{1.2} = 1 \qquad a = 1$

Teilaufgabe 6.2 (6 BE)
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der verbrauchten Würfel innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ P(X = x) & 0.15 & 0.10 & 0.2 & 0.4 & 0.15 \end{pmatrix}$$

$E(x) = \mu = 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.10 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.15 = 2.30 \qquad \mu := 2.30$

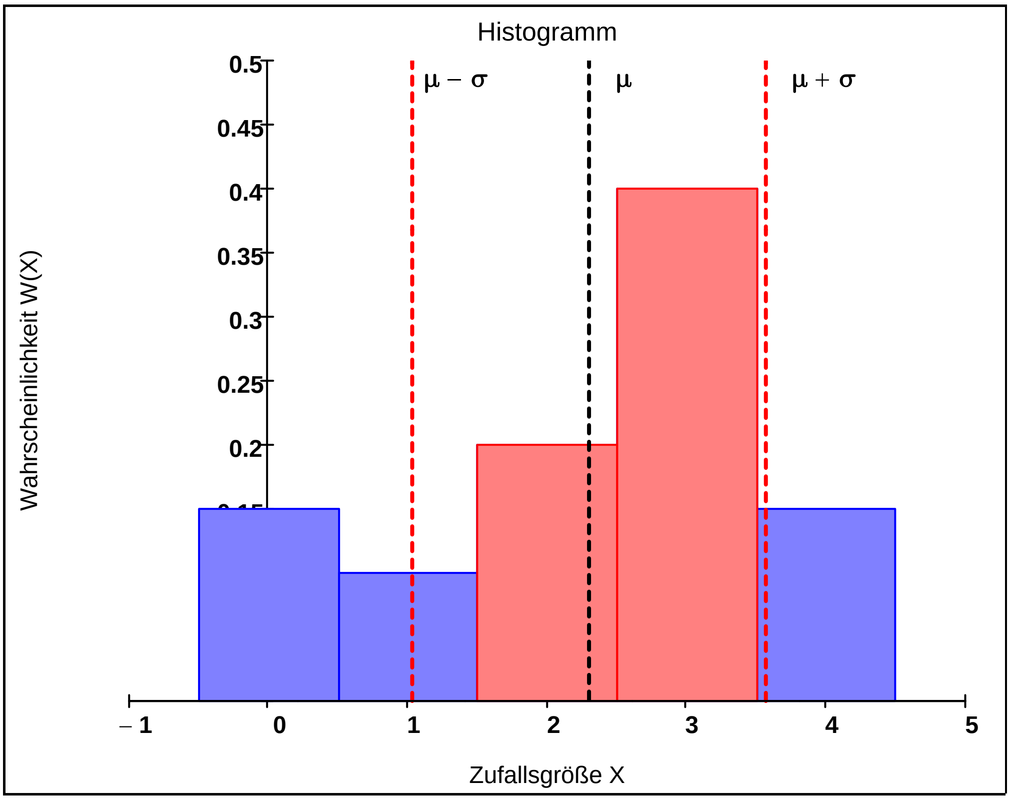
$Var(X) = \sigma^2 = 0^2 \cdot 0.15 + 1^2 \cdot 0.10 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.4 + 4^2 \cdot 0.15 - 2.3^2 = 1.61$

$\sigma := \sqrt{1.61} = 1.269$

untere Grenze: $\mu - \sigma = 1.031$

obere Grenze: $\mu + \sigma = 3.569$

$P(|X - \mu| < \sigma) = P(1.031 < X < 3.569) = P(2 \le X \le 3) = P(2) + P(3) = 0.2 + 0.4 = 0.6$


Histogramm
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
μ − σ
μ
μ + σ
Wahrscheinlichkeit W(X)
− 1
0
1
2
3
4
5
Zufallsgröße X