Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 12 Technik - B I - Lösung mit CAS**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 mit dem Ursprung O sind der Punkt P(7/-2/8) und die Ebenen E, F und G_k gegeben:

E: $-4 \cdot x_1 - x_2 + x_3 + 18 = 0$; F: $2 \cdot x_1 + x_2 - 12 = 0$; G_k: $x_2 + x_3 + k = 0$

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Ermitteln Sie **ohne CAS** eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F.

[Mögliches Ergebnis: s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in IR$]

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Wähle $x_2 = \lambda$

$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2} \cdot (12 - \lambda) = 6 - \frac{1}{2} \cdot \lambda \qquad \Rightarrow \quad x_3 = -18 + \lambda + 4 \cdot \left(6 - \frac{1}{2} \cdot \lambda\right) = 6 - \lambda$

Schnittgerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 - \frac{1}{2} \cdot \lambda \\ \lambda \\ 6 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes R, der durch Spiegelung des Ursprungs O an der Geraden s hervorgeht.

Schnittgerade s:

$$x_s(\lambda) := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt L $\in$ s:

$$OL(\lambda) := x_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} + 3 \\ 6 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

OL senkrecht s:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \lambda + 3 \\ 6 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \frac{9 \cdot \lambda}{4} - \frac{9}{2} = 0 \text{ auflösen}, \lambda \;\rightarrow 2$$

Ortsvektor zum Spiegelpunkt: Spiegelpunkt:

$$OR := 2 \cdot OL(2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad R := OR^T \qquad R \rightarrow (8 \quad 8 \quad 4)$$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Bestimmen Sie **ohne CAS** alle Werte von k, für die die drei Ebenen E, F und G_k jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben.

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -k \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot(II)+(I)} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -k \end{pmatrix} \xrightarrow{(III)-(II)} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -k-6 \end{pmatrix}$$

keine Lösung, falls: $-k - 6 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -k \neq 6 \quad \Leftrightarrow \quad k \neq -6$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)

Zusätzlich sind die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in$ IR und der Punkt Q(4/4/2) gegeben.

Bestimmen Sie **ohne CAS** die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 auf der Geraden h so, dass das Volumen der jeweiligen Pyramide $OPQS_1$ bzw. $OPQS_2$ die Maßzahl 27 hat.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad OS(\mu) := \begin{pmatrix} 4\cdot\mu + 3 \\ \mu - 3 \\ 9 - \mu \end{pmatrix}$$

Allgemeine Bedingung: $\frac{1}{6} \cdot \left| \left(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} \right) \cdot \overrightarrow{OS} \right| = 27$

Nebenrechnungen: $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -36 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4\cdot\mu + 3 \\ \mu - 3 \\ 9 - \mu \end{pmatrix} = 162 - 162\cdot\mu$

Konkrete Bedingung: $|162 - 162\cdot\mu| = 27 \cdot 6$

1. Fall: $\mu_1 := 162 - 162\cdot\mu = 27\cdot 6 \text{ auflösen}, \mu \rightarrow 0 \qquad \mu_1 = 0$

2. Fall: $\mu_2 := -(162 - 162\cdot\mu) = 27\cdot 6 \text{ auflösen}, \mu \rightarrow 2 \qquad \mu_2 = 2$

Geradenpunkte: $OS_1 := OS(0) \qquad S_1 := OS(\mu_1)^T \qquad S_1 \rightarrow (3 \quad -3 \quad 9)$

$OS_2 := OS(0) \qquad S_2 := OS(\mu_2)^T \qquad S_2 \rightarrow (11 \quad -1 \quad 7)$

Teilaufgabe 2.0
Ein Fluglotse beobachtet zwei Flugzeuge gleichzeitig, deren jeweilige Positionen F_1 bzw. F_2 sich in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem des IR^3 in einem bestimmten Zeitraum durch folgende Gleichungen beschreiben lassen:

$$\overrightarrow{OF_1} = \begin{pmatrix} -5.6 \\ -5.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in [\,0\,;\,30\,]\,; \qquad \overrightarrow{OF_2} = \begin{pmatrix} -7.8 \\ 0.8 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 \in [\,0\,;\,30\,]\,;$$

Die Koordinaten von $\overrightarrow{OF_1}$ und $\overrightarrow{OF_2}$ haben die Einheit km, die Parameter t_1 und t_2 beschreiben jeweils die nach dem gleichzeitigen Beobachtungsbeginn verstrichene Zeit in Minuten. Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen schneiden und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes T beider Flugbahnen an. Zeigen Sie weiterhin, dass es trotzdem zu keiner Kollision kommt.

$$OF_1(t_1) := \begin{pmatrix} -5.6 \\ -5.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} \qquad OF_2(t_2) := \begin{pmatrix} -7.8 \\ 0.8 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$OF_1(t_1) = OF_2(t_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.6 \cdot t_1 - 5.6 \\ 0.8 \cdot t_1 - 5.8 \\ 0.2 \cdot t_1 + 1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \cdot t_2 - 7.8 \\ 0.1 \cdot t_2 + 0.8 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, t_1, t_2 \rightarrow (11.0 \quad 22.0)$$

Lösungen: $t_1 := 11$ $\qquad t_2 := 22$

Schnittpunkt T der Flugbahnen:

$$OT := OF_1(t_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ 3.0 \\ 4.0 \end{pmatrix} \qquad T := OT^T \qquad T \rightarrow (1.0 \quad 3.0 \quad 4.0)$$

Zeitpunkte t_1 und t_2 stimmen jedoch nicht überein, also keine Kollision.

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Weisen Sie nach, dass zum Zeitpunkt t ab Beobachtungsbeginn für den Abstand d(t) zwischen beiden Flugzeugen gilt: $d(t) = \sqrt{0.57 \cdot t^2 - 9.24 \cdot t + 53.24}$.
Bestimmen Sie außerdem den Zeitpunkt t_{min} (gerundet auf eine Nachkommastelle), zu dem der quadrierte Abstand (also $(d(t))^2$) am geringsten ist. Geben Sie zusätzlich den Abstand zum Zeitpunkt t_{min} an.

$$\begin{pmatrix} -5.6 \\ -5.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -7.8 \\ 0.8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0.2 \cdot t + 2.2 \\ 0.7 \cdot t - 6.6 \\ 0.2 \cdot t - 2.2 \end{pmatrix}$$

$$d(t) := \sqrt{(0.2 \cdot t + 2.2)^2 + (0.7 \cdot t - 6.6)^2 + (0.2 \cdot t - 2.2)^2}$$

Nebenrechnungen:

$$(0.2 \cdot t + 2.2)^2 \text{ erweitern } \rightarrow 0.88 \cdot t + 0.04 \cdot t^2 + 4.84$$

$$(0.7 \cdot t - 6.6)^2 \text{ erweitern } \rightarrow -9.24 \cdot t + 0.49 \cdot t^2 + 43.56$$

$$(0.2 \cdot t - 2.2)^2 \text{ erweitern } \rightarrow -0.88 \cdot t + 0.04 \cdot t^2 + 4.84$$

$$0.88 \cdot t + 0.04 \cdot t^2 + 4.84 + \left(-9.24 \cdot t + 0.49 \cdot t^2 + 43.56\right) + \left(-0.88 \cdot t + 0.04 \cdot t^2 + 4.84\right) = \cdot$$

$$\ldots = -9.24 \cdot t + 0.57 \cdot t^2 + 53.24$$

$$d(t) = \sqrt{-9.24 \cdot t + 0.57 \cdot t^2 + 53.24}$$

Hilfsfunktion:

$$f(t) := 0.57 \cdot t^2 - 9.24 \cdot t + 53.24$$

$$f'(t) := \frac{d}{dt} f(t) = 1.14 \cdot t - 9.24$$

$$f'(t) = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow 8.1052631578947368421$$

$t_{min} := 8.1$

G_f ist eine nach oben geöffnete Parabel, also Tiefpunkt (8,1 / 4,0)

$d(t_{min}) = 4.0$