Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 12 Technik - B II - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 mit dem Ursprung O sind die Punkte A(1/3/-2), B_k(k/0/1) mit k $\in$ IR und C(-1/6/0) sowie die Ebene E: $5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 4$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Die Ebene E schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten X, Y und Z.
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide OXYZ.

$$E(x_1, x_2, x_3) := 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 4$$

Schnittpunkt mit der x_1-Achse:

$$x_1 := E(x_1, 0, 0) = 0 \rightarrow 5 \cdot x_1 - 4 = 0 \text{ auflösen}, x_1 \rightarrow \frac{4}{5} \qquad OX := \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt mit der x_2-Achse:

$$x_2 := E(0, x_2, 0) = 0 \rightarrow 2 \cdot x_2 - 4 = 0 \text{ auflösen}, x_2 \rightarrow 2 \qquad OY := \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt mit der x_3-Achse:

$$x_3 := E(0, 0, x_3) = 0 \rightarrow 2 \cdot x_3 - 4 = 0 \text{ auflösen}, x_3 \rightarrow 2 \qquad OZ := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$V := \frac{1}{6} \cdot [(OX \times OY) \cdot OZ] \qquad V = \frac{8}{15} = 0.533$$

Teilaufgabe 1.2 **(3 BE)**

Bestimmen Sie den Wert für k so, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB_k}$ und $\overrightarrow{AC}$ orthogonal zueinander sind.

Ortsvektoren: $OA := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad OB(k) := \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad OC := \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektoren: $AB(k) := OB(k) - OA = \begin{pmatrix} k-1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad AC := OC - OA = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$AB(k) \cdot AC = 0 \rightarrow -2 \cdot k - 1 = 0 \text{ auflösen}, k \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Teilaufgabe 1.3 **(6 BE)**

Berechnen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Flächeninhalt F(k) des Dreiecks AB_kC minimal wird.
Hinweis: Es genügt, den Term unter der Wurzel zu betrachten.
[Mögliches Teilergebnis: $F(k) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13 \cdot k^2 - 38 \cdot k + 322}$]

$$F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left| \left[\begin{pmatrix} k-1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -15 \\ -2 \cdot k - 4 \\ 3 \cdot k - 9 \end{pmatrix} \right|$$

$$F(k) := \frac{1}{2} \cdot \sqrt{15^2 + (-2 \cdot k - 4)^2 + (3 \cdot k - 9)^2}$$

$$F(k) = \frac{\sqrt{13 \cdot k^2 - 38 \cdot k + 322}}{2}$$

Hilfsfunktion: $f(k) := 13 \cdot k^2 - 38 \cdot k + 322$

Ableitungsfunktion: $f'(k) := \frac{d}{dk} f(k) = 26 \cdot k - 38$

Extremstelle: $k_0 := f'(k) = 0 \text{ auflösen}, k \rightarrow \frac{19}{13}$

$f''(k) := \frac{d}{dk} f'(k) = 26$

$f''(k_0) = 26$ > 0, also Tiefpunkt

Teilaufgabe 1.4.0
Die Ebene H_k enthält das Dreieck AB_kC und wird beschrieben durch die Gleichung
H_k: $-15\cdot x_1 - (2\cdot k + 4)\cdot x_2 + (3\cdot k - 9)\cdot x_3 = -12\cdot k - 9$ (Nachweis nicht erforderlich).

Teilaufgabe 1.4.1 (4 BE)
Untersuchen Sie, für welche Werte von k sich die Ebenen E und H_k in einer gemeinsamen Geraden schneiden.

Normalenvektoren linear abhängig?

$$n_E := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad n_H(k) := \begin{pmatrix} -15 \\ -2\cdot k - 4 \\ 3\cdot k - 9 \end{pmatrix}$$

$$n_H(k) = \lambda\cdot n_E \rightarrow \begin{pmatrix} -15 \\ -2\cdot k - 4 \\ 3\cdot k - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot\lambda \\ 2\cdot\lambda \\ 2\cdot\lambda \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \lambda, k \rightarrow (-3 \quad 1)$$

$$n_H(1) = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$ E $\parallel H_1$ $\qquad$ $A \in H_1$. $A \in E$?

$E(OA_1, OA_2, OA_3) = 3$ ungleich Null, also $A \notin E$, E echt parallel H_1 für $k = 1$

$k \neq 1$ E und H_k schneiden sich in einer Geraden.

Teilaufgabe 1.4.2 (8 BE)
Berechnen Sie für $k = 3$ eine Gleichung der Schnittgeraden von E und H_3 sowie den Schnittwinkel zwischen E und H_3 auf eine Nachkommastelle gerundet.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 4 \\ -15 & -10 & 0 & -45 \end{pmatrix}$$

Wähle: $x_2 = \lambda$

2. Zeile: $x_1 = \frac{-1}{15}\cdot(-45 + 10\cdot\lambda) = 3 - \frac{2}{3}\cdot\lambda$

1. Zeile: $x_3 = \frac{1}{2}\cdot\left[4 - 5\cdot\left(3 - \frac{2}{3}\cdot\lambda\right) - 2\cdot\lambda\right] = \frac{2\cdot\lambda}{3} - \frac{11}{2}$

Schnittgerade g: $\vec{x_g} = \begin{pmatrix} 3 - \frac{2}{3}\cdot\lambda \\ \lambda \\ \frac{2\cdot\lambda}{3} - \frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Schnittwinkel zwischen den Ebenen E und H_3 entspricht dem Schnittwinkel zwischen den Normalenvektoren.

$n_E := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad n_H := \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -95$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-95|}{\sqrt{25+4+4}\cdot\sqrt{225+100}} = \frac{95}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{325}}$$

$\alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{95}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{325}}\right)$ $\qquad \alpha = 23.5°$

Teilaufgabe 1.4.3 (5 BE)
Bestimmen Sie den Wert für k so, dass H_k den Ursprung enthält. Untersuchen Sie anschließend, ob in diesem Fall der Urprung 0 im Inneren des Dreiecks AB_kC liegt.

$H_k(x_1, x_2, x_3, k) := -15\cdot x_1 - (2\cdot k + 4)\cdot x_2 + (3\cdot k - 9)\cdot x_3 + 12\cdot k + 9$

$0 \in H_k$: $\qquad k_0 := H_k(0,0,0,k) = 0 \rightarrow 12\cdot k + 9 = 0$ **auflösen, k** $\rightarrow -\frac{3}{4}$

Gibt es die Linearkombination: $\qquad \vec{AO} = \lambda_1\cdot\vec{AC} + \lambda_2\cdot\vec{AB(k_0)}$

Verbindungsvektor $\vec{AO}$: $\qquad \vec{AO} = -\vec{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) + \lambda_2 \cdot \left(\overrightarrow{OB(k_0)} - \overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{AO}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1.75 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Komponenten: $-2 \cdot \lambda_1 - 1.75 \cdot \lambda_2 = -1$ (1)

$3 \cdot \lambda_1 - 3 \cdot \lambda_2 = -3$ (2)

$2 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 = 2$ (3)

(3) + (2) $5 \cdot \lambda_1 = -1$ $\lambda_1 = \frac{-1}{5}$

in (2) $\lambda_2 = \lambda_1 + 1 = \frac{-1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$

Probe mit (1) $-2 \cdot \left(\frac{-1}{5}\right) - 1.75 \cdot \frac{4}{5} = -1$ wahre Aussage

Da $\lambda_1 < 0$, kann O nicht im Inneren des Dreiecks $AB_{-0.75}C$ liegen.