Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 13 Nichttechnik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion **f** mit $f(x) := \left(\frac{1}{4}\cdot x^2 + x + 2\right)\cdot e^{\frac{-1}{2}\cdot x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Untersuchen Sie f auf Nullstellen und das Verhalten von $f(x)$ für $x \Rightarrow \pm\infty$.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{4}\cdot x^2 + x + 2\right)\cdot e^{-0.5\cdot x} = 0$$

da $e^{-0.5\cdot x} > 0$: $\frac{1}{4}\cdot x^2 + x + 2 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} -2+2i \\ -2-2i \end{pmatrix}$ keine relle Lösung

G_f besitzt keine Nullstellen.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\cdot x^2 + x + 2\right)\cdot e^{-0.5\cdot x}\right] \rightarrow \infty \qquad (\infty \uparrow \quad \infty \uparrow)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\cdot x^2 + x + 2\right)\cdot e^{-0.5\cdot x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{4}\cdot x^2 + x + 2}{e^{0.5\cdot x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot x + 1}{\frac{1}{2}\cdot e^{0.5\cdot x}}\right)$$

$(\infty \uparrow \quad 0 \uparrow \qquad \infty \uparrow \quad \infty \downarrow$ L'Hosp. $\infty \uparrow \quad \infty \downarrow)$

L'Hosp.

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}\right) \rightarrow 0 \qquad (\infty \downarrow)$$

Teilaufgabe 1.2 (10 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f sowie Art und Koordinaten der Punkte mit horizontalen Tangenten.
Untersuchen Sie G_f auch auf Wendepunkte.

[Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-1}{8} \cdot x^2 \cdot e^{-0.5 \cdot x}$]

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x + 1\right) \cdot e^{-0.5 \cdot x} + \left(\frac{1}{4} \cdot x^2 + x + 2\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot e^{-0.5 \cdot x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x + 1 - \frac{1}{8} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - 1\right) \cdot e^{-0.5 \cdot x}$$

$$f'(x) := \frac{-1}{8} \cdot x^2 \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot x}$$

$f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty\ ;\ 0[$ und für $x \in]0\ ;\ \infty[$.

Horizontale Tangenten:

$f'(x) = 0$ $\quad x_{12} = 0$ zweifache Nullstelle, deshalb keine Extremstelle, jedoch Wendestelle mit waagrechter Tangente, also Terrassenpunkt.

G_f ist streng monoton fallend in IR.

$$f''(x) = \frac{-1}{4} \cdot x \cdot e^{-0.5 \cdot x} - \frac{1}{16} \cdot x^2 \cdot e^{-0.5 \cdot x} = \frac{-1}{16} \cdot x \cdot (4 - x) \cdot e^{-0.5 \cdot x}$$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (4 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$ einfache Nullstellen, also Wendestellen.

$f(0) = 2$ Terrassenpunkt **TeP(0/2)**

$f(4) \to 10 \cdot e^{-2}$ Wendepunkt $WP(4 / \frac{10}{e^2})$

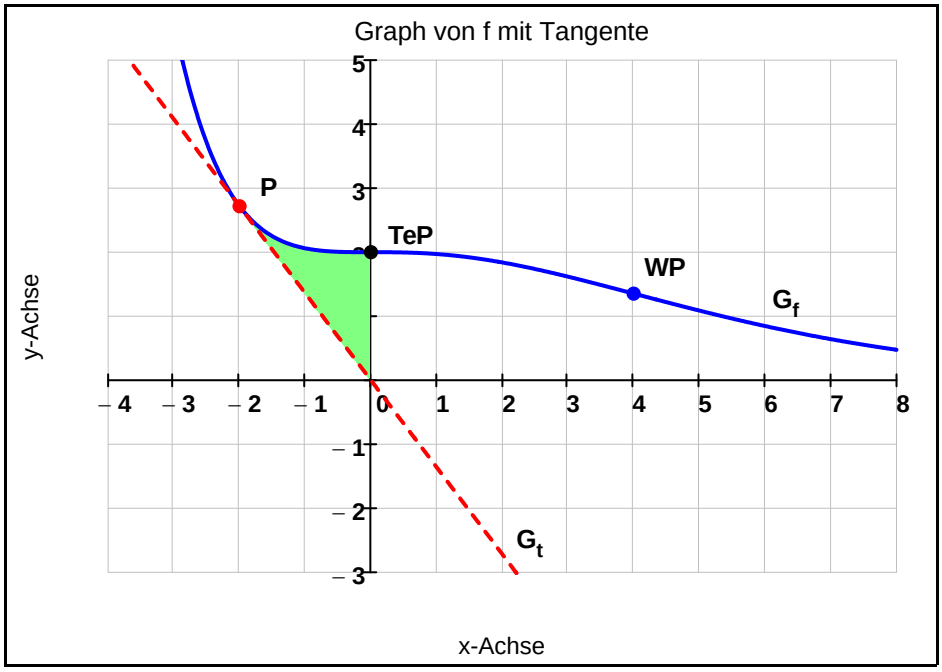
Teilaufgabe 1.3 (3 BE)
Bestimmen Sie Gleichung der Tangente t an den Graphen G_f im Punkt $P(-2 / f(-2))$.

[Ergebnis: $t(x) = -0.5 \cdot e \cdot x$]

$f(-2) = e$ $\quad f'(-2) = -\frac{e}{2}$

Tangente: $t(x) := f'(-2) \cdot (x + 2) + f(-2) = e - \frac{e \cdot (x + 2)}{2} = -\frac{x \cdot e}{2}$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Zeichnen Sie G_f und die Tangente aus 1.3 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-3 \le x \le 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (**1 LE = 1 cm**)



Teilaufgabe 1.5.1 (5 BE)
Berechnen Sie die reellen Werte von a und b so, dass die Funktion F mit
$F(x) = \left(-0.5 \cdot x^2 + a \cdot x + b\right) \cdot e^{-0.5 \cdot x}$ mit $D_F = IR$ eine Stammfunktion von f wird.
[Ergebnis: **a = –4** ; **b = –12** ;]

$$F''(x) = (-x + a) \cdot e^{-0.5 \cdot x} + \left(\frac{-1}{2} \cdot x^2 + a \cdot x + b\right) \cdot \left(\frac{-1}{2} \cdot e^{-0.5 \cdot x}\right)$$

$$F''(x) = \left[\frac{-1}{4} \cdot x^2 + \left(-1 - \frac{1}{2} \cdot a\right) \cdot x + a - \frac{1}{2} \cdot b\right] \cdot e^{-0.5x}$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_0 := -1 - \frac{1}{2} \cdot a = 1 \text{ auflösen}, a \rightarrow -4$$

$$b_0 := a - \frac{1}{2} \cdot b = 2 \text{ auflösen}, b \rightarrow 2 \cdot a - 4 \text{ ersetzen}, a = -4 \rightarrow -12$$

Lösung: $a_0 = -4$ $b_0 = -12$

Teilaufgabe 1.5.2 (5 BE)
Die Tangente aus 1.3, der Graph G_f und die x-Achse schließen im II. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in der Zeichnung von 1.4 und berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts.

$$A = \int_{-2}^{0} (f(x) - t(x))\,dx$$

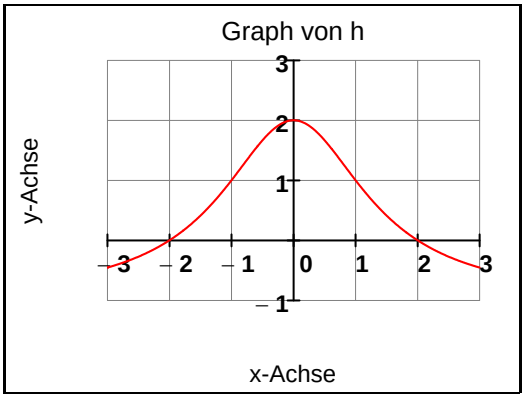
Stammfunktion der Differenzfunktion:

$$D(x) := \left(\frac{-1}{2}\cdot x^2 - 4\cdot x - 12\right)\cdot e^{\frac{-1}{2}\cdot x} + \frac{1}{4}\cdot e\cdot x^2$$

$D(0) = -12$ $\qquad$ $D(-2) = -5\cdot e$

$A := D(0) - D(-2)$ $\qquad$ $A = 5\cdot e - 12$

Teilaufgabe 2.0 (5 BE)
In nebenstehender Zeichnung ist der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion h mit dem funktionsterm $h(x)$ dargestellt.
Für die Funktion g gilt: $g(x) = \ln(h(x))$



Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Bestimmen Sie aus der Zeichnung die maximale Definitionsmenge $D_g \subset IR$ von g und geben Sie das Verhalten von $g(x)$ an den Rändern von D_g sowie die Nullstellen von $g(x)$ an.

$h(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad D_g =]-2\,;\,2[$

$\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) \to -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) \to -\infty$

$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$

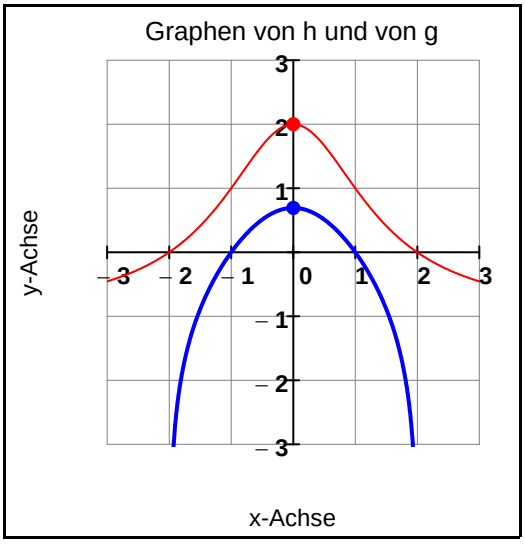
Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Untersuchen Sie den Graphen von g auf Extrempunkte und geben Sie deren Art und Koordinaten an.

$$g'(x) = \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) \quad \Leftrightarrow \quad g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h'(x) = 0$$

Also ist die Extremstelle von h auch die Extremstelle von g: $x_E = 0$

von h: $HP_h(0/2)$ von g: $HP_g(0/\ln(2))$

In der Prüfung nicht verlangt.



Teilaufgabe 3.0
Der Sauerstoffgehalt S von Gewässern, der in mg/l (Milligramm pro Liter) angegeben wird, lässt Rückschlüsse auf den Fischbestand der Gewässer zu. Ertragreiche Fischgewässer haben einen Sauerstoffgehalt von mehr als 6 mg/l. Dieser hängt unter anderem von der Wassertemperatur und dem Grad der Verunreinigung des Wassers ab.
Ein Bach wird zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Einleiten von organischen Abfällen an einer Stelle verunreinigt. Bei annähernd konstanter Temperatur beschreibt folgende Funktion modellhaft den Sauerstoffgehalt in der Nähe der Einleitungsstelle in den Tagen nach der Verunreinigung:

$$S(t) := \frac{-36 \cdot t}{t^2 + 16} + 6 \quad (t \geq 0 \text{ in Tagen})$$

Bei den Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)
Geben Sie den Sauerstoffgehalt S zu Beginn der Schadstoffeinleitung an und ermitteln Sie den Wert, auf den sich S langfristig einstellen wird.

Sauerstoffgehalt zu Beginn: $S(0) = 6$

Sauerstoffgehalt langfristig: $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{-36 \cdot t}{t^2 + 16} + 6 \right) \to 6$

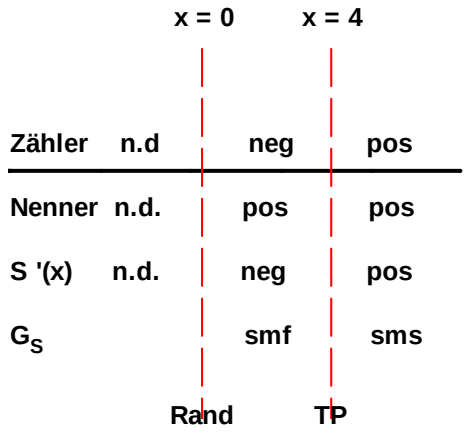
$\downarrow$

0 da Zählergrad < Nennergrad

Teilaufgabe 3.2 (8 BE)
Ermitteln Sie die Zeitintervalle, in denen der Sauerstoffgehalt steigt bzw. fällt und bestimmen Sie damit die Koordinaten des Extrempunktes von S. Interpretieren Sie die Koordinaten des Extrempunktes im Sachzusammenhang.
[Zur Kontrolle: $S'(t) := 36 \cdot \frac{t^2 - 16}{\left(t^2 + 16\right)^2}$]

$$S'(t) = \frac{-36 \cdot \left(t^2 + 16\right) + 36 \cdot t \cdot 2 \cdot t}{\left(t^2 + 16\right)^2} = 36 \cdot \frac{t^2 - 16}{\left(t^2 + 16\right)^2}$$

Nullstellen vpon S'(t): $t^2 - 16 = 0 \text{ auflösen}, t \to \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

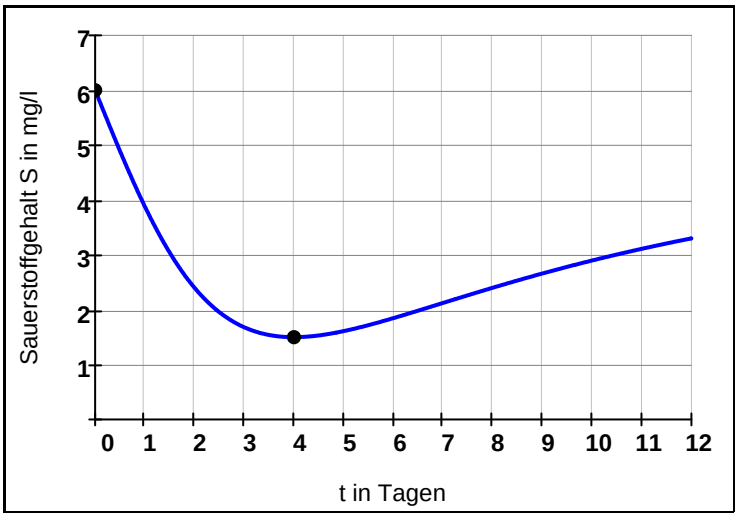


Der Sauerstoffgehalt fällt in $t \in [0;4]$, und steigt in $t \in [4;\infty[$

$$S(4) = \frac{3}{2}$$

Der Sauerstoffgehalt ist nach 4 Tagen am niedrigsten und beträgt 1,5 mg/l.

Teilaufgabe 3.3 (4 BE)
Zeichnen Sie den Verlauf des Sauerstoffgehalts für die ersten 12 Tage in ein geeignetes Koordinatensystem.



Teilaufgabe 3.4 (5 BE)
Unterhalb eines Werts von 3 mg/l können Fische nicht überleben. Untersuchen Sie rechnerisch, ab welchem Zeitpunkt ein Fischsterben wegen Sauerstoffmangel zu erwarten ist und ab welchem Zeitpunkt der Sauerstoffgehalt ein Überleben der Fische wieder ermöglicht.

$$\frac{-36\cdot t}{t^2+16} + 6 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -36\cdot t = -3\cdot\left(t^2+16\right) \quad \Leftrightarrow \quad 12\cdot t = t^2+16$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 12\cdot t + 16 = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{5}+6 \\ 6-2\cdot\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.472 \\ 1.528 \end{pmatrix}$$

Da G_S nach 1,5 Tagen fallend ist, setzt nach 1,5 Tagen ein Fischsterben ein.
Da G_S nach 10,5 Tagen steigend ist, können die Fische im Bach wieder überleben.